

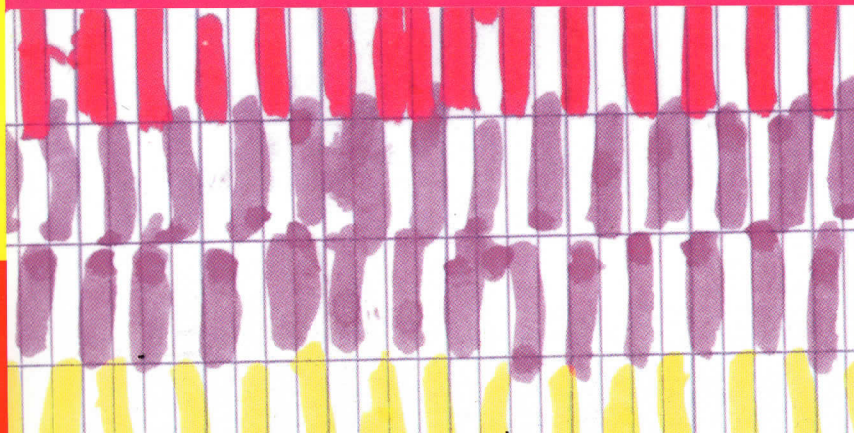
Plücker y Poncelet

Dos modos de entender
la geometría

Ricardo Moreno Castillo

21

La matemática en
sus personajes



nivola

La matemática en sus personajes

Colección dirigida por Antonio Pérez Sanz

Plücker y Poncelet

Dos modos de entender
la geometría

Ricardo Moreno Castillo

© Ricardo Moreno Castillo, 2005, 2008

© NIVOLA libros y ediciones S.L.

Apartado de Correos 113, 28008 Torrelavega

Tel.: 91 804 38 17

www.nivola.com

contacto@nivola.com

ISBN 978-84-937-1032-8

Depósito legal M. 48.808-2005

Impreso en España

21

La matemática en
sus personajes

nivola

A Joaquín Hernández y Luisa Gómez

1ª edición: 2005

2ª edición: 2008

Imagen de cubierta: Violeta Fernández Villalba

© Ricardo Moreno Castillo, 2005, 2008

© NIVOLA libros y ediciones, S.L.

Apartado de Correos 113. 28760 Tres Cantos

Tel.: 91 804 58 17

www.nivola.com

contacto@nivola.com

ISBN: 978-84-92493-25-8

Depósito legal: M. 48.808-2008

Impreso en España

Sin la autorización escrita de los titulares del copyright, queda rigurosamente prohibida la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático.

Índice

Plücker y Poncelet

Dos modos de entender la geometría

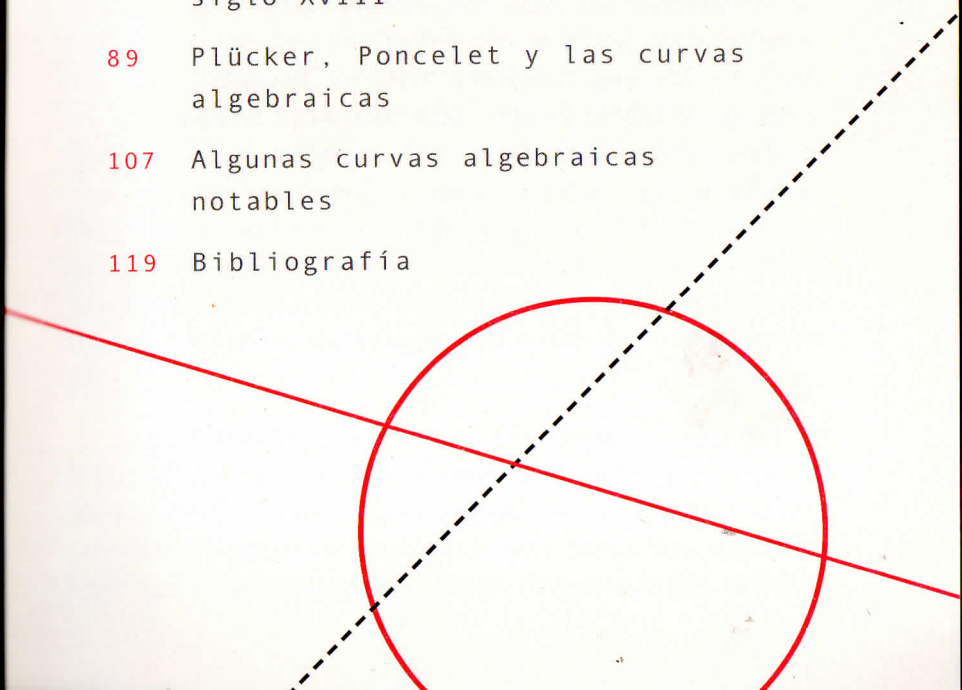
Ricardo Moreno Castillo

21

La matemática en
sus personajes

nivola
L I B R O S
E D I C I O N E S

Índice

- 11 Introducción
 - 13 Algunos preliminares geométricos
 - 19 Los orígenes de la geometría proyectiva
 - 37 Poncelet y la geometría proyectiva sintética
 - 43 Plücker y la geometría proyectiva analítica
 - 61 Las curvas algebraicas en el siglo XVIII
 - 89 Plücker, Poncelet y las curvas algebraicas
 - 107 Algunas curvas algebraicas notables
 - 119 Bibliografía
- 

Índice

Introducción	11
A algunos preliminares geométricos	12
Los orígenes de la geometría	19
Proyectiva	21
Poncelet y la geometría	22
Proyectiva sintética	23
Plücker y la geometría proyectiva	43
Análisis	44
Las curvas algebraicas en el	61
siglo XVIII	62
Plücker, Poncelet y las curvas	88
algebraicas	89
Algunas curvas algebraicas	107
notables	108
Bibliografía	119

Introducción

El siglo XVII vio nacer varias disciplinas matemáticas. La más importante de ellas fue, sin duda, el cálculo infinitesimal, cuya potencia comparada con la geometría clásica, por el gran descubrimiento de la geometría proyectiva. Los matemáticos, por lo tanto, comenzaron a sistematizar los conocimientos que hasta entonces habían sido dispersos. La primera de las dos más que una nueva ciencia, fue un poderoso instrumento al servicio de otras ramas de la geometría. Tendió puentes con el álgebra, simplificó muchas demostraciones, clasificó sistemáticamente las curvas. Con todo, sus cálculos oscurecen en ocasiones las ideas geométricas, y por esta razón no fue recibida con idéntico alborozo por todos los matemáticos. La segunda al que fue una innovación más que metodológica incorporó elementos que hasta entonces la geometría no había tenido en cuenta, y con ellos llegó a nuevos resultados que antes hubieran sido inabarcables. Pero la geometría analítica también podía ser útil a la geometría proyectiva, de modo que ésta albergó en su seno la brecha entre los escépticos y los entusiastas de aquella. En el siglo XIX casi no había geometría que no estuviera adscrita a uno de los dos bandos. Los protagonistas de nuestra historia, Plücker y Poncelet, son los más representativos de cada uno de ellos.

Bertrand Russell

Dejo constancia de mi gratitud a mis compañeros de Jesús de la Fuente Alfaro y José Manuel Gamboa Montañera, que leyeron pacientemente el borrador, corrigiendo errores, censurando los propósitos y sugiriendo notables mejoras. Ahora bien, insensato como soy, no siempre sigo los consejos de quienes saben más que

Introducción

El siglo XVII vio nacer varias disciplinas matemáticas. La más importante de ellas fue, sin duda, el cálculo infinitesimal, cuya paternidad comparten Newton y Leibniz. Otras dos, menos conocidas por el gran público, son la geometría analítica y la geometría proyectiva. Los precedentes de ambas pueden rastrearse en fechas anteriores, pero sus respectivos orígenes suelen asociarse a dos matemáticos nacidos a finales del XVI, ambos franceses, y de apellidos fácilmente confundibles: Descartes y Desargues. La primera de las dos, más que una nueva ciencia, fue un poderoso instrumento al servicio de otras ramas de la geometría. Tendió puentes con el álgebra, simplificó muchas demostraciones y permitió una clasificación sistemática de las curvas. Con todo, sus cálculos oscurecen en ocasiones las ideas geométricas, y por esta razón no fue recibida con idéntico alborozo por todos los matemáticos. La segunda sí que fue una innovación más que metodológica. Incorporó elementos que hasta entonces la geometría no había tenido en cuenta, y con ellos llegó a nuevos resultados que antes hubieran sido inalcanzables. Pero la geometría analítica también podía ser útil a la geometría proyectiva, de modo que ésta albergó en su seno la brecha entre los reticentes y los entusiastas de aquella. En el siglo XIX casi no había geómetra que no estuviera adscrito a uno de los dos bandos. Los protagonistas de nuestra historia, Plücker y Poncelet, son los más representativos de cada uno de ellos.

Dejo constancia de mi gratitud a mis compañeros M^a Jesús de la Puente Muñoz y José Manuel Gamboa Mutuberría, que leyeron pacientemente el borrador, corrigieron errores, enmendaron despropósitos y sugirieron notables mejoras. Ahora bien, insensato como soy, no siempre sigo los consejos de quienes saben más que

yo. Por esta razón, si alguien encuentra una equivocación o un desatino, sepa que solo mía es la culpa y solo a mi me alcanza la deshonra.

Y en esta segunda edición quiero también agradecer a mi compañera Angelines Prieto la perspicacia con que localizó algunas erratas que se habían colado en la primera.

1 Algunos preliminares geométricos

A fin de facilitar la lectura de este libro, resumiremos a continuación algunos resultados de geometría que serán utilizados en él. Tan solo se darán por conocidas las propiedades más elementales de los ángulos y de la semejanza de triángulos.

Ángulo inscrito en una circunferencia

Un ángulo está inscrito en una circunferencia si el vértice está sobre ella y los lados la cortan, abarcando entre ellos un cierto arco. La medida de este arco es siempre la mitad de la del ángulo. Para demostrar esto, supongamos en primer lugar que uno de los lados pasa por el centro de la circunferencia (Figura 1).

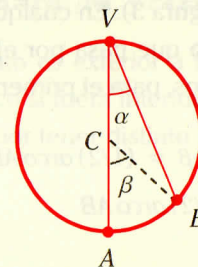


Figura 1

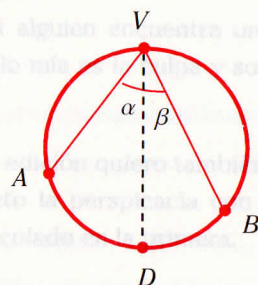


Figura 2

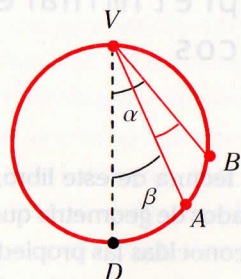


Figura 3

El ángulo β mide lo que el arco AB , y $\pi - \beta$ es un ángulo del triángulo isósceles VCB . Entonces $\pi - 2\alpha = \pi - \text{arco } AB$, y en consecuencia $\alpha = (1/2) \text{ arco } AB$.

Si ningún lado del ángulo inscrito pasa por el centro, pueden suceder dos cosas. O bien el centro es interior al ángulo (Figura 2) o bien es exterior a él (Figura 3). En cualquiera de ambas situaciones trazamos el diámetro que pasa por el vértice y, en virtud del resultado anterior, tenemos, para el primer caso:

$$\begin{aligned} \text{Ángulo inscrito} &= \alpha + \beta = (1/2) \text{ arco } AD + (1/2) \text{ arco } DB = \\ &= (1/2) \text{ arco } AB \end{aligned}$$

Y para el segundo:

$$\begin{aligned} \text{Ángulo inscrito} &= \alpha - \beta = (1/2) \text{ arco } BD - (1/2) \text{ arco } AD = \\ &= (1/2) \text{ arco } AB \end{aligned}$$

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Consideremos una circunferencia y un punto P . Desde él trazamos rectas que cortan a la circunferencia, la cual determina sobre cada una de ellas dos segmentos de origen P . El producto de las longitudes de ambos es un número fijo, cualquiera que sea la recta, y se llama *potencia del punto P respecto de la circunferencia*.

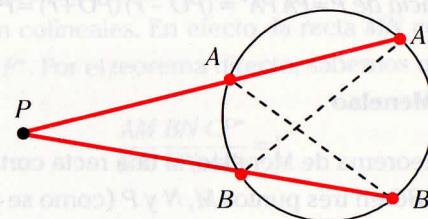


Figura 4

Veamos por qué esto es así. En la Figura 4 están dibujadas dos de las muchas rectas que pasan por P . Los ángulos inscritos en la circunferencia cuyos vértices son A^* y B^* son iguales, por abarcar el mismo arco, entonces los triángulos PBA^* y PAB^* son semejantes. En consecuencia, $PA/PB = PB^*/PA^*$ y $PA \cdot PA^* = PB \cdot PB^*$.

En el dibujo el punto es exterior a la circunferencia, pero el razonamiento es idéntico si fuera interior. En este caso la potencia se considera negativa, por tener distinto sentido los segmentos PA y PA^* .

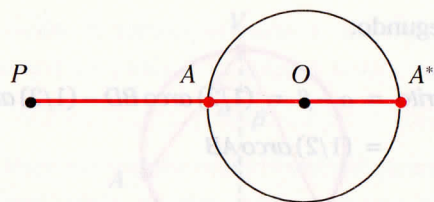


Figura 5

La potencia de un punto se puede calcular en función de su distancia al centro O de la circunferencia y del radio r de ésta. En efecto, mirando la Figura 5 se ve claramente lo siguiente:

$$\text{Potencia de } P = PA \cdot PA^* = (PO - r)(PO + r) = PO^2 - r^2$$

Teorema de Menelao

Según el teorema de Menelao, si una recta corta a los lados de un triángulo ABC en tres puntos M , N y P (como se puede ver en la Figura 6), sucede lo siguiente:

$$\frac{AM}{BM} \frac{BN}{CN} \frac{CP}{AP} = 1$$

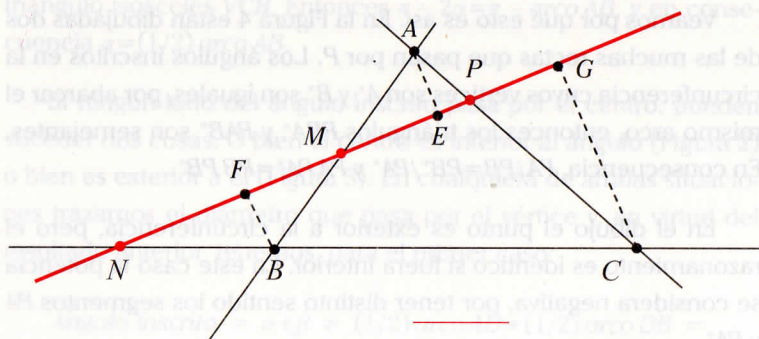


Figura 6

Para demostrarlo, trazamos perpendiculares desde los vértices del triángulo hasta la recta, que la encuentran en los puntos E , F y G . El triángulo AME es semejante a BMF , NCG lo es a NBF y APE a PCG . Estas tres semejanzas dan lugar a las igualdades que vienen a continuación (los signos negativos indican que los segmentos AM y BM , así como CP y AP , tienen orientaciones opuestas):

$$\frac{AM}{BM} = -\frac{AE}{BF} \quad \frac{BN}{CN} = \frac{BF}{CG} \quad \frac{CP}{AP} = -\frac{CG}{AE}$$

El producto de las tres lleva directamente a la tesis del teorema.

El teorema recíproco también es cierto: si tres puntos M , N y P , cada uno de ellos sobre un lado del triángulo, cumplen la relación de Menelao, son colineales. En efecto, la recta MN cortará al lado AC en un punto P^* . Por el teorema directo, sabemos que:

$$\frac{AM}{BM} \frac{BN}{CN} \frac{CP^*}{AP^*} = 1$$

Comparando esta igualdad con la que admitimos por hipótesis, tenemos que $P = P^*$, y los puntos M , N y P están en una misma recta.

Teorema de Ceva

Un hermoso y casi inmediato corolario del teorema de Menelao fue descubierto por el italiano Giovanni Ceva en el siglo XVII. Imaginemos tres rectas que parten cada una de ellas de los vértices A , B y C de un triángulo, y cortan a los lados opuestos en los puntos N , M y P respectivamente. Pues bien, el teorema de Ceva afirma que la condición necesaria y suficiente para que las rectas sean concurrentes es la siguiente (ver Figura 7):

$$\frac{AM}{BM} \frac{BN}{CN} \frac{CP}{AP} = 1$$

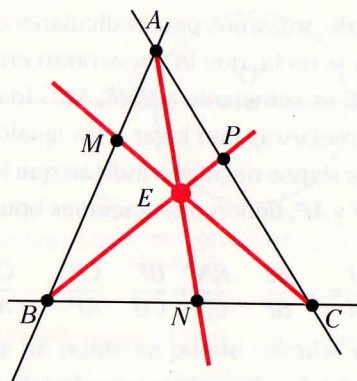


Figura 7

Para demostrar la necesidad, aplicamos el teorema de Menelao a los triángulos ABN y ACN (atravesado el primero por la recta MC y el segundo por la recta BP):

$$\frac{AM}{BM} \frac{BC}{NC} \frac{NE}{AE} = 1 \quad \frac{AE}{NE} \frac{NB}{CB} \frac{CP}{AP} = 1$$

Multiplicando ambas expresiones, y teniendo en cuenta que $BC = -CB$, tenemos el resultado que buscamos. La demostración de la suficiencia del teorema de Ceva es idéntica a la del de Menelao. Sean tres puntos M , N y P sobre los lados de un triángulo que obedecen a la relación de Ceva. Consideramos los puntos E (intersección de las rectas AN y CM), y P^* (intersección de las rectas BE y AC). Por el teorema directo, sabemos que:

$$\frac{AM}{BM} \frac{BN}{CN} \frac{CP^*}{AP^*} = -1$$

Comparando esta igualdad con la hipótesis del teorema, vemos que $P = P^*$, y las rectas AN , CM y BP son concurrentes.

2 Los orígenes de la geometría proyectiva



Estatua de Leon Battista Alberti en la Galería de los Oficios de Florencia.

El embrión de la geometría proyectiva está en los esfuerzos de los pintores renacentistas para representar el espacio sobre una superficie plana. Filippo Brunelleschi (1377-1446), Paolo Uccello (1379-1475) y Masaccio (1401-1428) fueron los primeros en interesarse por la geometría griega para aplicarla a la pintura, pero el gran

teórico en la materia fue Leon Battista Alberti (1404-1472), quien explicó el principio que sería la base del sistema matemático de perspectiva. Puede esbozarse así este principio: imaginemos un vidrio vertical interpuesto entre un observador y un objeto, y un rayo de luz que une cada punto del objeto con el ojo del observador. Este haz de rayos se llama una proyección, y a su intersección con el vidrio, sección de dicha proyección. La sensación visual de la sección es idéntica a la del objeto, pues ambas proceden de las mismas líneas de luz. Ahora bien, se pinta sobre un lienzo opaco, no sobre una superficie transparente. La sección sobre el lienzo no puede ser calcada directamente, y para dibujarla hacen falta unas ciertas reglas geométricas. En su obra *De pictura* (publicada en 1435) proporcionó Alberti estas reglas, además de formular un problema importantísimo: ¿cuál es la relación entre dos secciones de un mismo objeto tomadas desde diferentes puntos de vista? Piero della Francesca (1410-1492) y Alberto Durero (1471-1528) profundizaron en las ideas de Alberti y continuaron trabajando en el tema. A partir del año 1500, el estudio de esta geometría de las proyecciones y secciones era ya indispensable para todo aspirante a pintor, aunque todavía era una disciplina empírica con escasa base teórica.

Sobre lo que es una propiedad proyectiva

Un ejemplo aclarará lo que se acaba de explicar. Estamos pintando lo que hay en una habitación sobre una superficie paralela a una de sus paredes, en la cual hay dibujados un círculo y un cuadrado. También en el suelo hay dibujados un círculo y un cuadrado. El círculo de la pared lo pintaremos como un círculo, y el cuadrado como un cuadrado. Cambian de tamaño, pero no de forma, porque son dos secciones de una proyección entre planos paralelos. En cambio, para que las cosas estén en el cuadro como las vemos, pintaremos el círculo del suelo como una elipse (con su eje menor perpendicular a la pared) y el cuadrado como un trapecio (los ángulos obtusos más cerca de la pared, los agudos más lejos). Esto

es, la propiedad de ser un círculo o un cuadrado no se mantiene a través de proyecciones ni secciones (porque dos secciones no son siempre paralelas), lo que quiere decir que no es lo que en adelante llamaremos una *propiedad proyectiva*. Tampoco se conservan las distancias (los diámetros del círculo son iguales, los de elipse no), ni los ángulos (los cuatro ángulos del cuadrado son rectos, los del trapecio no), ni el paralelismo (dos lados del cuadrado del suelo dejan de ser paralelos en el dibujo). Ahora bien, hay algo que sí permanece. Cualquiera que sea la posición del lienzo, nunca aparecerá el círculo como un trapecio ni el cuadrado como una elipse. Luego la única propiedad proyectiva que de momento tenemos es la de ser una línea recta: tres puntos alineados siempre se convierten en tres puntos alineados. El estudio de las propiedades proyectivas de las figuras se llama *geometría proyectiva*. No son de su competencia los teoremas que tengan en cuenta las distancias y los ángulos, que incumben a la geometría métrica. Casi todos los teoremas griegos son de esta última. Una curiosa excepción es el de Pappus, el último gran matemático alejandrino, que afirma que si A, B y C son puntos de una recta, y A^*, B^* y C^* son puntos de otra recta (y ninguno de ellos está en ambas), entonces los puntos P, Q y R (donde se encuentran las rectas AB^* con BA^* , AC^* con CA^* y BC^* con CB^* respectivamente) también son colineales (ver Figura 8). En

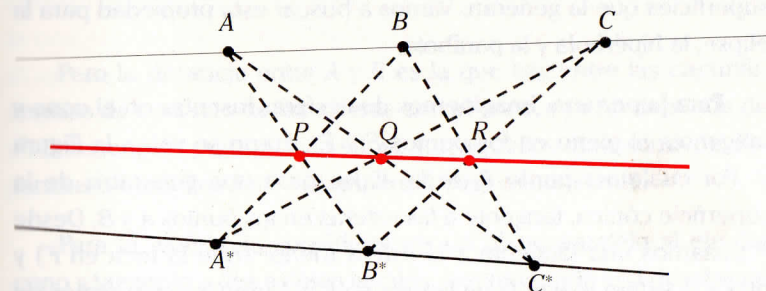


Figura 8

este teorema se mencionan puntos alineados y rectas que se cortan, pero no ángulos ni distancias, entonces puede ser considerado de geometría proyectiva.

Las cónicas y la geometría proyectiva

Se conocen con el nombre de cónicas las curvas obtenidas al cortar un plano con un cono, entendido éste como dos superficies cónicas ilimitadas opuestas por el vértice. Sobre ellas escribieron Menecmo, Euclides y Arquímedes, pero quien lo hizo de un modo completo fue Apolonio de Perga, quien en el siglo III a.C. publicó un tratado donde recoge todo lo que ya se sabía de cónicas y da a conocer muchos teoremas nuevos. Las *Cónicas* de Apolonio es una obra compuesta por ocho libros, de los que sólo los cuatro primeros nos han llegado en su original griego. De los tres siguientes conocemos sus versiones árabes. El octavo se ha perdido.

Las distintas posiciones del plano en relación con el eje del cono dan lugar a las distintas clases de cónicas. Si el plano corta a todas las generatrices, la cónica es una elipse. En cambio, si es paralelo a una de ellas, resulta ser una parábola. En todos los demás casos, se obtiene una hipérbola. Se puede encontrar, para cada género de cónica, una propiedad compartida por todos sus puntos. Con ella, la curva puede ser estudiada por sí misma, prescindiendo de las superficies que la generan. Vamos a buscar esta propiedad para la elipse, la hipérbola y la parábola.

Para la primera, imaginemos dos esferas inscritas en el cono y tangentes al plano en los puntos F y F^* , como se ve en la Figura 9. Por cualquier punto P de la elipse pasa una generatriz de la superficie cónica, tangente a las esferas en los puntos A y B . Desde P trazamos una tangente a la esfera menor (que la toca en F) y otra a la esfera mayor (que la toca en F^*). Como los segmentos de tangente trazados desde un punto a una esfera son todos iguales, sucede que $PA=PF$ y $PB=PF^*$. Entonces: $PF+PF^*=PA+PB=AB$

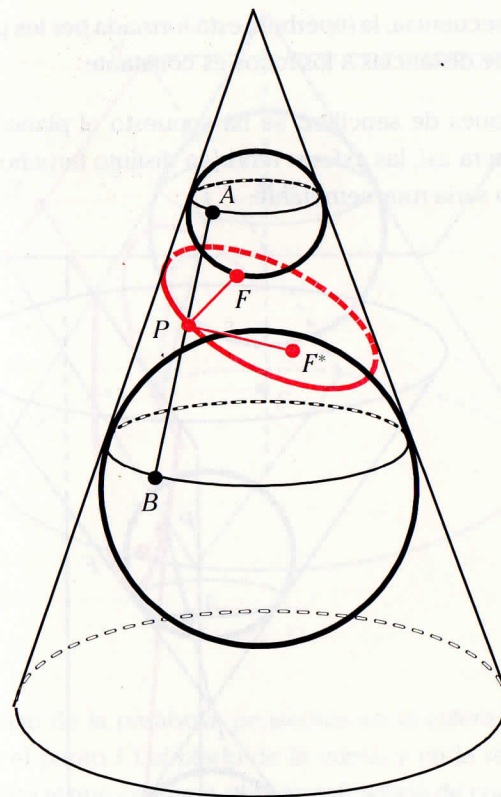
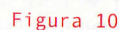


Figura 9

Pero la distancia entre A y B es la que hay entre las circunferencias de contacto de las esferas con el cono, y ya no depende de P . Entonces los puntos de la elipse son aquellos cuya suma de distancias a otros dos F y F^* (llamados *focos*) es constante.

Para la hipérbola, consideramos un plano paralelo al eje del cono y tangente a dos esferas iguales, inscritas cada una de ellas en cada una de las superficies cónicas (ver Figura 10). Por lo demás, repetimos el razonamiento anterior: $PF^* - PF = PB - PA = AB$.

Por razones de sencillez, se ha supuesto el plano paralelo al eje. Si no fuera así, las esferas tendrían distinto tamaño pero el razonamiento sería muy semejante.



En la figura 12 podemos ver las tres especies de cónicas. Si proyectamos el plano α sobre el plano β a través del vértice del cono, la elipse se transforma en la hipérbola, y al proyectarlo sobre el plano χ , lo hace en la parábola. Esto quiere decir que cualquier

cónica se puede convertir en cualquier otra proyectándola desde un punto exterior a su plano y cortando el haz de rectas así obtenido con otro plano. Hay una salvedad. Si el plano pasa por el vértice del cono, se obtiene un par de rectas. Por esta razón, a la figura formada por dos rectas se la considera una cónica, si bien una cónica *degenerada*. Como las proyecciones respetan las líneas rectas, transforman las cónicas degeneradas en cónicas degeneradas. Entonces la geometría proyectiva reconoce tan solo dos especies de cónicas, las degeneradas y las que no lo son. La distinción entre elipses, hipérbolas y parábolas concierne exclusivamente a la geometría métrica.

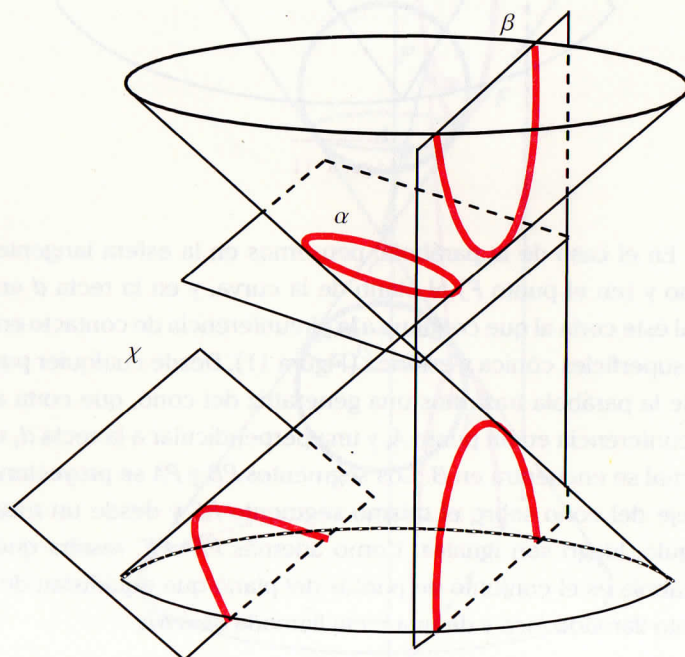


Figura 12

Desargues



Desargues

Girard Desargues (1591-1661) es el primero que intenta la tarea de proporcionar una base sólida a las reglas utilizadas por los pintores renacentistas. Para empezar, tuvo en cuenta que dos rectas paralelas en la realidad no lo son siempre en el dibujo, luego el punto de encuentro de las representaciones de dichas rectas no siempre corresponde a un punto de las rectas representadas. Para que la correspondencia fuera completa, dotó a cada recta de un punto del infinito, y al plano de una recta del infinito. Con estos nuevos elementos llegó a algunos resultados decisivos.

Uno de ellos (conocido hoy como teorema de Desargues o de los triángulos homólogos) afirma que si las rectas que unen los vértices homólogos de dos triángulos se encuentran en un punto (lo que significa que cada uno de ellos es sección del otro), entonces los pares de lados homólogos se cortan en tres puntos alineados (Figura 13). La recta se llama *eje de homología*, y el punto *centro de homología*. Desargues lo demostró como se explica a continuación. Aplica el teorema de Menelao a los triángulos LBC , ALC y ABL , atravesados cada uno de ellos por las transversales B^*C^* , A^*C^* y A^*B^* , y obtiene las siguientes igualdades:

$$\frac{B^*L}{B^*B} \frac{PB}{PC} \frac{C^*C}{C^*L} = 1 \quad \frac{A^*A}{A^*L} \frac{C^*L}{C^*C} \frac{RC}{RA} = 1 \quad \frac{B^*B}{B^*L} \frac{A^*L}{A^*A} \frac{QA}{QB} = 1$$

Se multiplican las tres y resulta lo siguiente:

$$\frac{PB}{PC} \frac{RC}{RA} \frac{QA}{QB} = 1$$

Entonces, por el recíproco del teorema de Menelao, los puntos P , Q y R están alineados. Otro resultado debido a Desargues es la

conservación de la razón doble a través de proyecciones. La *razón doble* de cuatro puntos colineales A, B, C e D es un número que se calcula del siguiente modo (los segmentos de la fórmula de la derecha están orientados, lo que significa que están dotados de signo):

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \frac{BD}{AD}$$

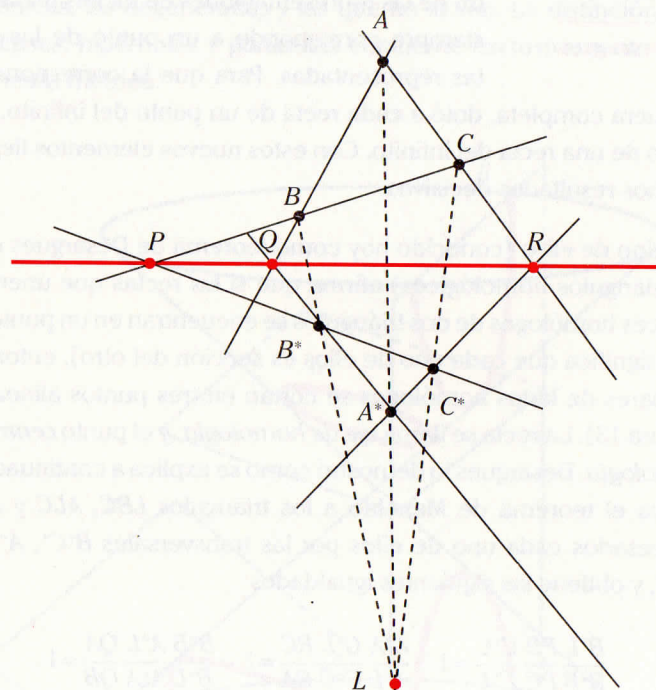


Figura 13

El teorema de invariancia afirma que si los cuatro puntos son proyectados sobre otra recta (como se ve en la Figura 14), sucede que $(ABCD) = (A^*B^*C^*D^*)$.

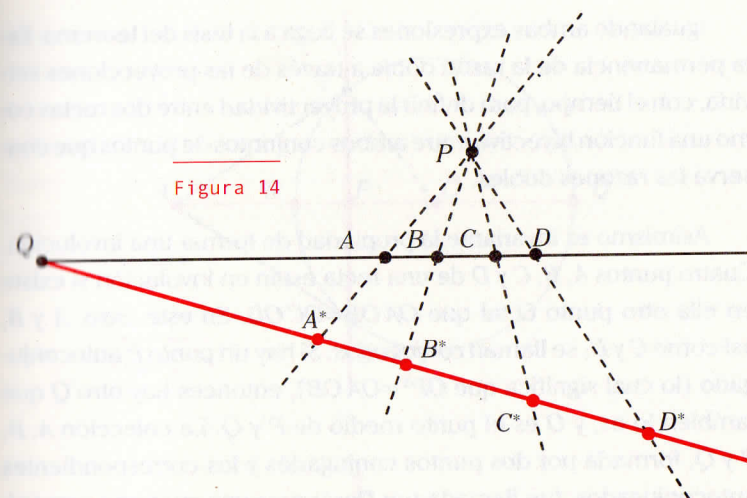


Figura 14

Para demostrar esto también es útil el teorema de Menelao. Consideramos el triángulo QCC^* , cortado en primer lugar por la recta PA^* y en segundo por PB^* :

$$\frac{AQ}{AC} \frac{PC}{PC^*} \frac{A^*C^*}{A^*Q} = 1 \quad \frac{BQ}{BC} \frac{PC}{PC^*} \frac{B^*C^*}{B^*Q} = 1$$

Dividimos la segunda expresión entre la primera y resulta lo siguiente:

$$\frac{AC}{BC} \frac{B^*C^*}{A^*C^*} \frac{BQ}{AQ} \frac{A^*Q}{B^*Q} = 1$$

Repetimos el razonamiento con el triángulo QDD^* , cortado por las mismas transversales, y llegamos a una situación similar a la anterior:

$$\frac{AD}{BD} \frac{B^*D^*}{A^*D^*} \frac{BQ}{AQ} \frac{A^*Q}{B^*Q} = 1$$

Igualando ambas expresiones se llega a la tesis del teorema. Esta permanencia de la razón doble a través de las proyecciones serviría, con el tiempo, para definir la proyectividad entre dos rectas como una función biyectiva entre ambos conjuntos de puntos que conserva las razones dobles.

Asimismo es invariante la propiedad de formar una involución. Cuatro puntos A, B, C y D de una recta están en involución si existe en ella otro punto O tal que $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. En este caso, A y B , así como C y D , se llaman *conjugados*. Si hay un punto P autoconjugado (lo cual significa que $OP^2 = OA \cdot OB$), entonces hay otro Q que también lo es, y O es el punto medio de P y Q . La colección A, B, P y Q , formada por dos puntos conjugados y los correspondientes autoconjugados, fue llamada por Desargues una *cuaterna armónica*. Posteriormente se definiría la cuaterna armónica como cuatro puntos de razón doble igual a menos uno. La equivalencia entre ambas definiciones es fácil de demostrar. También lo es el ver que si B es el punto medio del segmento PQ , entonces A está en el infinito.

Con este concepto de cuaterna armónica pudo avanzar en la teoría de polos y polares, ya introducida por Apolonio. Imaginemos un punto A y una circunferencia. Sobre cualquiera recta que pase por A se puede encontrar un punto B tal que la cuaterna formada por A, B , y los puntos C y D donde se cortan la recta y la circunferencia, es armónica. Todos estos puntos están en una recta llamada *polar* del punto respecto de la circunferencia. Si A es exterior, su polar es la recta a que une los puntos de contacto de la curva con las tangentes trazadas desde él. Para demostrar por qué esto es así, dibujamos primero la recta que pasa por A y el centro O de la circunferencia, la cual se encuentra con a en P (Figura 15).

De la semejanza de los triángulos ATO y TPO se desprende lo siguiente:

$$AO \cdot PO = OT^2 = OO^2 = OR^2$$

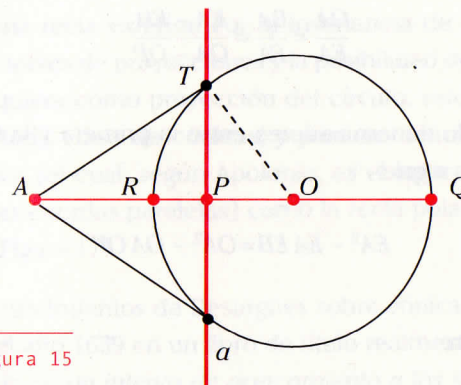


Figura 15

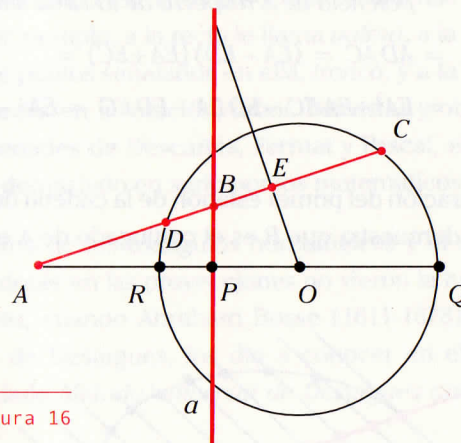


Figura 16

En consecuencia, A y P son conjugados armónicos en relación a R y a Q . Ahora tiramos desde A una recta cualquiera, que corta a R en B y a la circunferencia en C y D (Figura 16). Veremos cómo B es el conjugado de A en relación a C y D . La mediatriz del segmento CD (cuyo punto medio es E) pasa por O , y los triángulos APB y AEO son semejantes. Entonces:

$$\frac{OA}{EA} = \frac{BA}{PA} = \frac{EA - EB}{OA - OP}$$

Eliminando denominadores entre la primera y la tercera fracción, llegamos a que:

$$EA^2 - EAEB = OA^2 - OAOP$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} EA^2 - EAEB &= OA^2 - OAOP = OA^2 - OQ^2 = \\ &= \text{potencia de A respecto de la circunferencia} = \\ &= ADAC = (EA - ED)(EA + EC) = \\ &= EA^2 + EAEC - EDEA - EDEC = EA^2 - EDEC \end{aligned}$$

La comparación del primer eslabón de la cadena de igualdades con el último demuestra que B es el conjugado de A en relación a C y D .

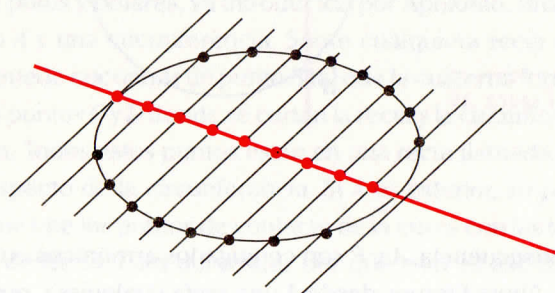


Figura 17

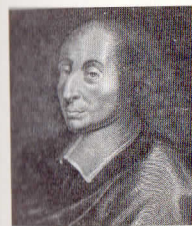
Unos razonamientos muy similares demuestran que la polar de un punto de la circunferencia es tangente a él, y la de un punto

interior es una recta exterior. Por la invariancia de las cuaternas armónicas a través de proyecciones y la posibilidad de obtener una cónica cualquiera como proyección del círculo, este resultado es válido para toda clase de cónicas, y permite definir el diámetro de una cónica (el cual, según Apolonio, es el lugar de los puntos medios de las cuerdas paralelas) como la recta polar de un punto del infinito (Figura 17).

Los descubrimientos de Desargues sobre cónicas aparecieron publicados el año 1639 en un libro de título realmente poco atractivo, *Bosquejo de un intento de acercamiento a los sucesos procedentes de cortar un cono con un plano*, expuestos en un extraño lenguaje y utilizando términos procedentes muchos de ellos de la botánica. Por ejemplo, a la recta le llama *palma*, a la recta con una colección de puntos señalados en ella, *tronco*, y a la recta con tres pares de puntos en involución, *árbol*. Por estas y otras razones, y con las salvedades de Descartes, Fermat y Pascal, el *Bosquejo* no fue tomado demasiado en serio por los matemáticos del siglo XVII.

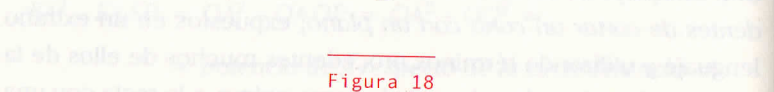
El teorema de los triángulos homológicos y el de invariancia de la razón doble en las proyecciones no vieron la luz hasta nueve años después, cuando Abraham Bosse (1611-1678), un grabador gran amigo de Desargues, los dio a conocer en el apéndice de un libro titulado *Método universal de Desargues para practicar la perspectiva*.

Pascal

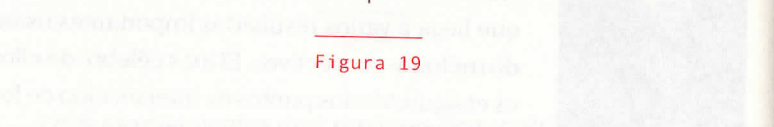


Pascal

Influido por Desargues, el filósofo y matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) escribió en 1640 un *Ensayo sobre cónicas*, en el que llega a varios resultados importantes usando métodos proyectivos. El más célebre de ellos es el siguiente: los puntos de intersección de los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica están en línea recta (ver Figura



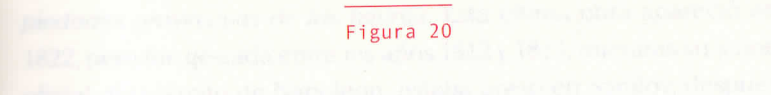
Esta configuración puede tener distintos aspectos según cómo coloquemos los puntos. En la Figura 19 vemos lo que sucede cuando estos están en orden alfabético.



Este teorema admite un recíproco: si los pares de lados opuestos de un hexágono se cortan en tres puntos alineados, éste está inscrito en una circunferencia.

La Hire

Philippe de La Hire (1640-1718), pintor en su juventud y después matemático, publicó unas *Secciones cónicas*, donde demuestra, siguiendo el camino marcado por Desargues y Pascal, casi todos los teoremas de Apolonio sobre cónicas.



Además, La Hire aporta un resultado original: si un punto describe una recta, su polar gira alrededor del polo de dicha recta (ver Figura 20). Este teorema es un ejemplo de lo que más tarde se llamaría principio de dualidad.

3 Poncelet y la geometría proyectiva sintética

Los trabajos de Desargues, Pascal y La Hire recibieron poca atención durante el siglo XVIII, demasiado ocupado en administrar el legado de Newton. También la geometría sintética había sufrido un cierto eclipse frente al empuje de los métodos analíticos creados por Descartes y Fermat. En el XIX, gracias a los trabajos de Gaspard Monge (1746-1818), Charles Brianchon (1785-1864) y Jean Victor Poncelet (1788-1867), tuvo lugar un renacer de la geometría proyectiva. El primero publicó en 1799 un *Tratado de geometría descriptiva*, el segundo estudió la aplicación de la geometría pura a los problemas militares, y el tercero escribió un *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*. Esta última obra apareció en 1822, pero fue gestada entre los años 1813 y 1814, mientras su autor, oficial del ejército de Napoleón, estaba preso en Saratov, después de participar en la campaña contra Rusia y haber sido dado por muerto durante la retirada de Moscú. En ambientes matemáticos se oye decir con frecuencia que la geometría proyectiva moderna nació en la prisión de Saratov.

Poncelet

Jean Victor
Poncelet

El *Tratado* de Poncelet está centrado en tres ideas. La primera es la de figuras *homólogas*. Dos figuras son homólogas si una de ellas procede de la otra mediante una sucesión de proyecciones y secciones. Se trata de encontrar para cualquier figura su homóloga más sencilla, estudiar en ella las propiedades invariantes mediante sección y proyección, y llegar de este modo a propiedades de la figura originaria. La segunda idea es el principio de continuidad: si una figura deriva de otra mediante un cambio continuo, toda propiedad de la primera vale para la segunda. Como ejemplo de la aplicación de este principio daremos el siguiente corolario del teorema de Pascal: en todo triángulo inscrito en una cónica, los puntos en los que las tangentes en los vértices cortan a los lados opuestos están en línea recta (Figura 21).

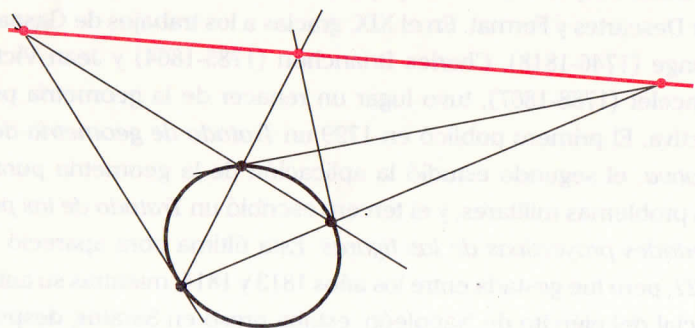


Figura 21

A este resultado se llega moviendo los vértices del hexágono de la Figura 19, de tal manera que B se superponga con A , D con C y E con F . Aunque sirvió para llegar a resultados correctos, el principio

de continuidad provocó reticencias entre algunos matemáticos, que lo consideraban una inducción un tanto atrevida. El mismo Cauchy se permitió hacer sobre él algunos comentarios jocosos.

La tercera idea es el *principio de dualidad*, fundado en la correspondencia entre polo y polar relativa a una cónica: si una afirmación sobre figuras planas es cierta, e intercambiamos en ella las palabras *punto* y *recta*, así como las relaciones de incidencia (punto perteneciente a una recta por recta conteniendo un punto) la nueva proposición también lo es. Joseph Gergonne (1771-1859) aclaró que el punto de vista de Poncelet requiere la mediación de una cónica, mientras que el principio de dualidad es general, aplicable a todo teorema que no mente propiedades métricas. Gergonne inició la costumbre, mantenida durante muchos años, de escribir los tratados de geometría a doble columna, con el enunciado dual a la derecha del original. Aplicando el principio de dualidad al teorema de Pascal, descubrió Brianchon este otro teorema: las líneas que unen los vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una cónica, pasan por un mismo punto (ver Figura 22).

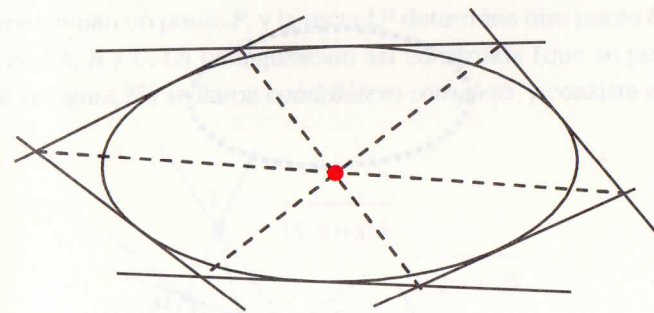


Figura 22

Puede ocurrir que el dual de un teorema coincida con su recíproco, y así sucede con el de los triángulos homológicos, como fácilmente se puede comprobar.

Poncelet reconoció en alguna ocasión que los resultados de la geometría sintética son más una consecuencia de la casualidad y la perspicacia del investigador que de la aplicación de un procedimiento general, y que en este sentido era superior la geometría analítica. Con todo, fue un acérrimo partidario de la primera, y las técnicas por él ideadas pudieron rivalizar en potencia y generalidad con las de la segunda.

Steiner, Chasles y Von Staud

El suizo Jakob Steiner (1796-1863) es el primer matemático de la órbita alemana que siguió el camino iniciado por Poncelet. También fue quien llevó el principio de dualidad más lejos que nadie. Tanto es así que llegó a hablar de cónicas de puntos y cónicas de rectas: una cónica puede ser considerada como el conjunto de sus puntos (Figura 23), pero con idéntica razón puede pensarse como el de todas sus rectas tangentes (Figura 24), que la identifican inequívocamente. De la curva diremos que es la *envolvente* de la familia de rectas.



Figura 23

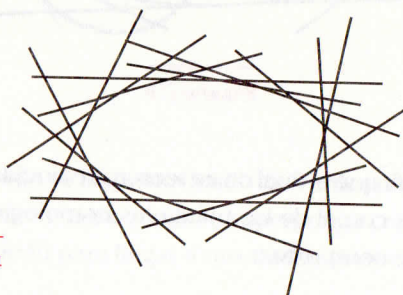


Figura 24



Michel Chasles

En 1852 apareció publicado el *Tratado de geometría superior* de Michel Chasles (1793-1880), el último de los grandes geómetras proyectivos franceses, y en 1865, del mismo autor, un *Tratado de secciones cónicas*. Este matemático dio a la razón doble la importancia que había de tener en lo sucesivo, pero siguió definiéndola en términos de longitud, que es un concepto métrico. Fue el alemán Karl von Staud (1798-1867), en su obra *Geometría de la posición*, quien liberó a la geometría proyectiva de todo lastre superfluo. Demostró que toda correspondencia entre rectas que conserve las cuaternas armónicas conserva también las razones dobles, y de esta manera es posible hablar de proyectividades sin mencionar las razones dobles ni las distancias. Esto es así porque el concepto de cuaterna armónica puede ser definido prescindiendo de cualquier consideración métrica. Un modo de hacerlo es el siguiente. Tenemos tres puntos alineados A , B y C . Desde A y B trazamos sendas rectas que se encuentran en L . Desde C , otra que corta a LA en M y a LB en N . Las rectas AN y BM determinan un punto P , y la recta LP determina otro punto D en línea con A , B y C . La configuración así construida (que se puede ver en la Figura 25) se llama *cuadrilátero completo*, y consiste en la

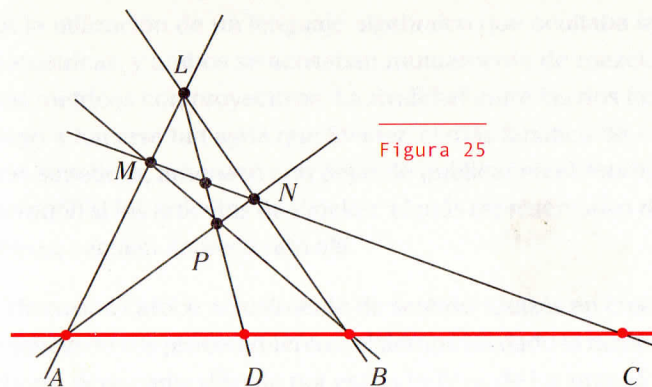


Figura 25

colección de las seis rectas determinadas por cuatro puntos entre los cuales no hay tres colineales.

Pues bien, los puntos A, B, C y D forman un grupo armónico. Para demostrarlo, aplicamos al triángulo ABL el teorema de Menelao, y después el de Ceva. Y llegamos a las siguientes igualdades:

$$\frac{AC}{BC} \frac{BN}{LN} \frac{LM}{AM} = 1 \quad \frac{AM}{LM} \frac{LN}{BN} \frac{BD}{AD} = -1$$

Multiplicando las dos igualdades y haciendo las simplificaciones pertinentes, resulta que:

$$\frac{AC}{BC} \frac{BD}{AD} = (ABCD) = -1$$

De este modo, la definición de cuaterna armónica depende de la de cuadrilátero completo, y en la de éste se mencionan puntos alineados y rectas que se cortan, pero no distancias ni ángulos. Lamentablemente, Von Staud siguió utilizando la noción de paralelismo, que no es proyectiva.

4 Plücker y la geometría proyectiva analítica

Después de hablar de los que hicieron progresar la geometría proyectiva utilizando métodos sintéticos, toca decir algo de los que lo hicieron usando procedimientos analíticos. La polémica entre unos y otros comenzó siendo amistosa, y las revistas de la época publicaban trabajos de los partidarios de ambas tendencias, pero pronto dejó de serlo. Los geómetras analíticos criticaban a los sintéticos por su incapacidad para demostrar el principio de dualidad en su versión más general, los sintéticos reprochaban a los analíticos la utilización de un lenguaje algebraico que ocultaba las ideas geométricas, y ambos se acusaban mutuamente de mezclar conceptos métricos con proyectivos. La rivalidad entre las dos facciones llegó a hacerse tan agria que Steiner, el más fanático de los geómetras sintéticos, amenazó con dejar de publicar en el *Journal für Mathematik* si los artículos de Plücker, el más representativo de los analíticos, seguían apareciendo allí.

Esta discusión carece actualmente de sentido. Quizás en cuanto a la potencia de sus procedimientos, el tiempo ha dado la razón a los analíticos, pero nadie discute por eso la belleza de los métodos sintéticos, que tampoco han quedado en desuso y siguen propor-

cionando hermosos resultados. Hoy cada geómetra sigue el camino que le indican sus gustos y sus aficiones, y nadie se mete con nadie.

Möbius

La más importante idea algebraica al servicio de la geometría proyectiva fue la de coordenadas homogéneas, propuesta por Ferdinand Möbius (1790-1868) en su trabajo más conocido, *El cálculo baricéntrico*. Möbius dibuja en el plano un triángulo y asigna a cada punto P las masas que deben ser colocadas en sus vértices para que dicho punto P sea el centro de gravedad de las tres masas. Estas coordenadas están determinadas salvo un factor de proporcionalidad, y solo los puntos interiores del triángulo tienen las tres positivas. Los puntos del infinito son aquellos para los cuales las tres coordenadas baricéntricas suman cero. Igualmente, se debe a Möbius la idea de colineación como la aplicación biyectiva entre los puntos de dos planos que transforma rectas en rectas (la forma más general de definir una aplicación proyectiva). Claramente, toda colineación convierte cuadriláteros completos en cuadriláteros completos, en consecuencia (por el teorema de Staud) induce una proyectividad entre cada recta y su transformada. También el concepto de razón doble de cuatro rectas concurrentes fue propuesto por Möbius:

$$(abcd) = \frac{\sin ac \sin bd}{\sin bc \sin ad}$$

La razón doble de cuatro puntos coincide con la de las cuatro rectas que resultan de proyectarlos desde un punto exterior a la recta r que los contiene (Figura 26).

En efecto, aplicando sucesivamente el teorema del seno a los triángulos ACP , BCP , ADP y BDP , tenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{\sin ac}{\sin cr} = \frac{AC}{AP} \quad \frac{\sin bc}{\sin cr} = \frac{BC}{BP} \quad \frac{\sin ad}{\sin dr} = \frac{AD}{AP} \quad \frac{\sin bd}{\sin dr} = \frac{BD}{BP}$$

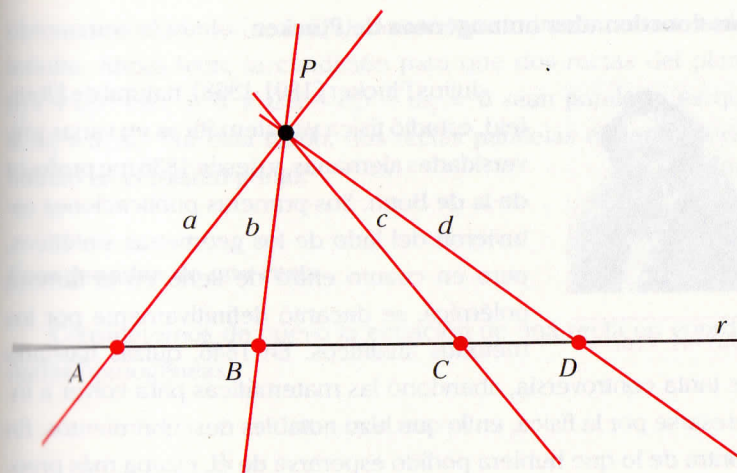


Figura 26

Entonces:

$$\begin{aligned} (abcd) &= \frac{\sin ac \sin bd}{\sin bc \sin ad} = \\ &= \frac{(\sin ac)/(\sin cr) (\sin bd)/(\sin dr)}{(\sin bc)/(\sin cr) (\sin ad)/(\sin dr)} = \\ &= \frac{AC/AP \cdot BD/BP}{BC/BP \cdot AD/AP} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = (ABCD) \end{aligned}$$

Si en el plano elegimos un sistema de coordenadas cartesianas, la razón doble de las cuatro rectas es la misma que la de cuatro puntos cuyas coordenadas sean sus respectivas pendientes. Para ver esto no hay más que situar el punto P en el origen de coordenadas y cortar el haz de las cuatro rectas con la de ecuación $x=1$.

Las coordenadas homogéneas de Plücker



Julius Plücker

Julius Plücker (1801-1868), natural de Elberfeld, estudió física y matemáticas en varias universidades alemanas, y desde 1836 fue profesor de la de Bonn. Sus primeras publicaciones estuvieron del lado de los geómetras sintéticos, pero en cuanto entró de lleno en la famosa polémica, se decantó definitivamente por los métodos analíticos. En 1846, quizás hastiado de tanta controversia, abandonó las matemáticas para volver a interesarse por la física, en la que hizo notables descubrimientos. En contra de lo que hubiera podido esperarse de él, estaba más preocupado por el lado experimental de la física que por el matemático. Alfred Clebsch afirmó, en una charla pronunciada en 1871, que la contradicción es solo aparente. Plücker tendía más a crear que a analizar, y esta tendencia era la fuente común de sus descubrimientos en física y en geometría.

Plücker creó un sistema de coordenadas homogéneas que, salvo para cierto tipo de problemas, es más manejable que el descubierto por Möbius. Cada punto del plano está determinado por tres números x , y y z tales que, si z es distinto de cero, los cocientes $X=x/z$ e $Y=y/z$ son las coordenadas cartesianas ordinarias. En cambio, si z es cero, representan un punto del infinito. Es evidente que si $\lambda \neq 0$, las ternas (x, y, z) y $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ corresponden a un mismo punto del plano proyectivo. De este modo, la ecuación de la recta del infinito es $z=0$, así como $y=0$ y $x=0$ lo son del eje de abscisas y del de ordenadas respectivamente.

Si la ecuación de una recta en coordenadas cartesianas ordinarias es $uX+vY+w=0$, en coordenadas homogéneas es $ux+vy+wz=0$. Entonces, resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{aligned} ux+vy+wz &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

obtenemos el punto $(v, -u, 0)$, donde nuestra recta corta a la del infinito. Ahora bien, la condición para que dos rectas del plano $u_1X+v_1Y+w_1=0$ y $u_2X+v_2Y+w_2=0$ sean paralelas es que $u_1/v_1 = u_2/v_2$. Por esta razón, dos rectas paralelas cortan a la del infinito en el mismo punto.

Coordenadas de una recta

Consideremos de nuevo la ecuación de una recta en coordenadas homogéneas:

$$ux + vy + wz = 0$$

A los números u , v y w les llamó Plücker *coordenadas de la recta*. Del mismo modo que las coordenadas homogéneas de un punto, las de la recta están determinadas salvo un factor de proporcionalidad. En la ecuación anterior las coordenadas de la recta y del punto juegan papeles simétricos, lo cual permite dos interpretaciones diferentes. Si u , v y w son números fijos y x , y y z variables libres, representa una recta. Pero si fijamos un punto $P = (x, y, z)$ y dejamos libres las coordenadas de la recta, representa el haz de todas las rectas que pasan por P . Si P está en el infinito, las rectas del haz son todas paralelas. De este modo puede justificarse algebraicamente el principio de dualidad, cosa que los geómetras sintéticos no habían sido capaces de hacer. En efecto, el intercambio de las palabras *punto* y *recta* corresponde en geometría analítica al de las palabras *constante* y *variable*, y por la simetría de la expresión $ux + vy + wz = 0$, es claro que todo teorema se puede enunciar de dos maneras, cada una de ellas dual de la otra.

Supongamos ahora dos rectas en coordenadas homogéneas, cuyas ecuaciones representaremos brevemente del siguiente modo: $l = 0$ y $m = 0$. Si α y β son dos números reales, la recta cuya ecuación es $\alpha l + \beta m = 0$ también pasa por el punto de encuentro de las dos primeras. Y recíprocamente, si tres rectas concurren en

un punto, el álgebra lineal demuestra que la ecuación de una de ellas es la suma de las otras dos multiplicadas por sendos números reales. Por el principio de dualidad, para que tres puntos P , Q y R , dados en coordenadas homogéneas, sean colineales, han de existir dos números α y β para los cuales $R = \alpha P + \beta Q$. Pero ya sabemos que αP y P , si bien con distintas coordenadas, señalan al mismo punto del plano proyectivo, lo mismo que βQ y Q . Entonces podemos decir que si el punto R está alineado con P y Q , estos últimos se pueden escribir de tal modo que $R = P + Q$. Por la misma razón, toda recta que pase por el punto donde se cortan las rectas $l = 0$ y $m = 0$ es de la forma $l + m = 0$, siempre que las coordenadas de ambas rectas hayan sido escogidas convenientemente.

Estas relaciones analíticas entre rectas concurrentes y entre puntos alineados suministran, para algunos teoremas, unas demostraciones de una sencillez admirable. Veamos, por ejemplo, la del teorema de los triángulos homológicos. Sean $l = 0$, $m = 0$ y $n = 0$ las ecuaciones de los lados BC , AC y AB , y $r = 0$ la del eje de homología (ver Figura 13). Por lo que acabamos de decir, las ecuaciones de las rectas B^*C^* , A^*C^* y A^*B^* admiten las formas $r + l = 0$, $r + m = 0$ y $r + n = 0$. Las dos primeras contienen a C^* , las restamos y tenemos la recta de ecuación $l - m = 0$, que también lo contiene. Ahora bien, al ser combinación de $l = 0$ y $m = 0$ también pasa por C , luego es la ecuación de la recta CC^* . Un argumento idéntico nos lleva a que las ecuaciones de las rectas AA^* y BB^* son $m - n = 0$ y $n - l = 0$. Cualquiera de las tres es suma de las otras dos, entonces AA^* , BB^* y CC^* concurren en un punto, y ya está demostrado el teorema.

Esta forma resumida de escribir ecuaciones de las rectas empezó a utilizarse en respuesta a las censuras de los geómetras sintéticos, muy críticos con lo farragoso de las fórmulas analíticas. En sus investigaciones sobre curvas algebraicas, Plücker habría de sacar mucho provecho de estas abreviaturas.

La ecuación de una colineación

Aceptando la definición de Möbius, una colineación entre dos planos es una aplicación biyectiva entre ambos tal que los transformados de puntos alineados están también alineados. Esto significa, se vio hace un momento, que se han de mantener las combinaciones lineales, por lo tanto la relación entre las coordenadas de un punto $P = (x, y, z)$ y las de su correspondiente $P^* = (x^*, y^*, z^*)$ ha de ser lineal:

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$y^* = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$z^* = a_3x + b_3y + c_3z$$

Si los puntos del infinito se transforman en puntos del infinito, la colineación se llama *afinidad*, y sus ecuaciones son:

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$y^* = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$z^* = c_3z$$

Una afinidad puede pensarse como una colineación entre dos planos a los que se les ha extirpado la recta del infinito, por lo cual es quizás más ilustrativo dar sus ecuaciones en coordenadas cartesianas ordinarias:

$$X^* = m_1X + n_1Y + p_1$$

$$Y^* = m_2X + n_2Y + p_2$$

(con $m_1 = a_1/c_3$, $n_1 = b_1/c_3$, $p_1 = c_1/c_3$, $m_2 = a_2/c_3$, $n_2 = b_2/c_3$ y $p_2 = c_2/c_3$).

Las cónicas como curvas de segundo grado

Ya vimos la caracterización de cada una de las especies de cónicas. Si los focos de una elipse o una hipérbola los colocamos en los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$, y llamamos $2a$ a la suma (en el primer caso) o

a la diferencia (en el segundo) de distancias a ellos desde cualquiera de los puntos de la curva, la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas ordinarias resulta ser $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$ (con $b^2 = a^2 - c^2$) y la de la hipérbola $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1$ (con $c^2 = a^2 + b^2$). Todo esto es cuestión de puro cálculo. También es fácil demostrar que la ecuación de la parábola es $Y^2 = 2cX$, si el foco es el punto $(c, 0)$ y la ecuación de la recta directriz $X = -c$. En los tres casos las ecuaciones son de segundo grado. El recíproco también es cierto: cualquier curva de segundo orden, esto es, representada por una ecuación de segundo grado $aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0$, es una cónica.

Admitida pues la sinonimia entre *cónicas* y *curvas de segundo grado*, vamos a demostrar analíticamente algo que ya se ha apuntado unas páginas atrás: la equivalencia proyectiva de las cónicas irreducibles. O lo que es igual, que todas ellas son convertibles mediante proyectividades en una sola. Partimos de una cónica en coordenadas proyectivas, no degenerada:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

Podemos imaginar, sin merma de generalidad, que pasa por el punto $(0, 0, 1)$, y que en consecuencia su ecuación carece de término en z^2 :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz = 0$$

Además, $d \neq 0$ ó $e \neq 0$ (de lo contrario la cónica degeneraría). Suponemos $e \neq 0$, y aplicamos a la curva la proyectividad consistente en poner ex en el lugar de la x , $-dx + y$ en el de la y , y dejar la z intacta. Y resulta lo siguiente:

$$gx^2 + hxy + cy^2 + eyz = 0$$

Si g fuera cero, la curva se desharía en las rectas $hx + cy + ez = 0$ y $z = 0$, pero la hipótesis excluye esta posibilidad. Luego $g \neq 0$ y la ecuación admite esta forma:

$$x^2 + mxy + ny^2 + pyz = 0$$

(donde $p = e/g \neq 0$). Sustituimos z por $-(m/p)x - (n/p)y + (1/p)z$, y llegamos a la parábola de ecuación $x^2 - yz = 0$. Si $e = 0$, entonces $d \neq 0$, y eliminaríamos el sumando en yz .

Polaridad en el plano

Si en las ecuaciones de una colineación imaginamos que las coordenadas de los elementos transformados son de rectas (y no de puntos), tenemos una *correlación*: una correspondencia que a cada punto del primer plano le asigna una recta del segundo (y por dualidad, también al revés) tal que a puntos colineales correspondan rectas concurrentes. Entonces, si las coordenadas de la recta transformada del punto $P = (x, y, z)$ son (u, v, w) , la ecuación de una correlación es:

$$u = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$v = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$w = a_3x + b_3y + c_3z$$

Una correlación de un plano en sí mismo se llama una *polaridad* si el punto transformado de la recta correspondiente a P vuelve a ser P . Un sencillo cálculo demuestra que en la ecuación de una polaridad $a_2 = b_1$, $a_3 = c_1$ y $b_3 = c_2$. Ahora bien, cualquier cónica (lo sabemos desde Desargues) genera una polaridad en el plano que la contiene. Las ecuaciones de esta polaridad se pueden calcular en función de la de la curva:

$$F(x, y, z) = ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0.$$

Los puntos de la cónica (y solo ellos) están sobre sus polares, que son las rectas tangentes a ella. Entonces, si $P = (x, y, z)$ pertenece a la cónica, ha de cumplir la ecuación de su polar. En consecuencia:

$$(a_1x+b_1y+c_1z)x+(a_2x+b_2y+c_2z)y+(a_3x+b_3y+c_3z)z=0$$

Operando, llegamos a la ecuación de una cónica:

$$a_1x^2+(b_1+a_2)xy+b_2y^2+(c_1+a_3)xz+(c_2+b_3)yz+c_3z^2=0$$

Cotejando ambas cónicas, tenemos que $a_1=a$, $b_2=c$, $c_3=f$, $b_1=a_2=b/2$, $c_1=a_3=d/2$ y $c_2=b_3=e/2$. Entonces la recta polar del punto $P=(p, q, r)$ es:

$$(2ap+bq+dr)x+(bp+2cq+er)y+(dp+eq+2fr)z=0$$

y las ecuaciones de la polaridad asociada a la cónica son las siguientes:

$$u = 2ax+by+dz$$

$$v = bx+2cy+ez$$

$$w = dx+ey+2fz$$

La ecuación de la recta polar de P también puede ser escrita de este modo (más fácil de memorizar):

$$xF_x(P)+yF_y(P)+zF_z(P)=0$$

(donde F_x , F_y y F_z son las derivadas parciales de F respecto de x , y y z).

La introducción de los números complejos en geometría

Es cosa sabida que, dentro de los números reales, los números positivos tienen raíz cuadrada y los negativos carecen de ella. Entonces, la única forma de dotar de raíz cuadrada a todos los números negativos es inventar más números, porque entre los reales es inútil buscarla. La ampliación se realiza admitiendo la existencia de un número i tal que $i^2 = -1$. Después consideramos todos los objetos de la forma $a+bi$ (con a y b números reales), a los cuales llamamos

números complejos. Al número a se le llama *parte real* del complejo y a b la *parte imaginaria*. Dentro de los complejos, todo número distinto de cero tiene dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, y así sucesivamente. Las posibilidades algebraicas con estos nuevos números son pues mucho mayores, y no se pierden ninguna de las que existían antes, porque los números reales pueden ser pensados como complejos de parte imaginaria cero.

Es posible identificar el conjunto de todos los números complejos con el de puntos del plano, asociando a cada número complejo $a+bi$ con el punto (a, b) (o, si se quiere con el vector de componentes a y b , como se puede ver en la Figura 27). Por esta razón, se habla a veces del *plano complejo*.

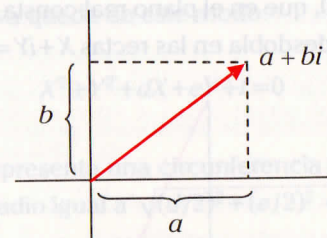


Figura 27

Esta interpretación es útil porque proporciona un soporte visual a los números complejos, pero en cierta medida empaña sus verdaderas posibilidades geométricas. Si en lugar de asociar el punto (a, b) con el complejo $a+bi$, se le identifica con el par de números complejos $(a+0i, b+0i)$, el plano real (entendido como el conjunto de pares de números reales) queda sumergido en el plano complejo (entendido éste, no como el resultado de la identificación propuesta en primer lugar, sino como el conjunto de pares de números complejos). De esta manera se puede hacer una geometría analítica sobre los números complejos, en la cual el plano real es tan

solo la parte *visible* de esta geometría. Pensemos, por ejemplo, en la circunferencia de ecuación $X^2+Y^2=25$ y en la recta de ecuación $2X+Y=15$. En la Figura 28 se puede ver claramente que no se cortan, y quien intente resolver el sistema formado por ambas ecuaciones llegará a la raíz de un número negativo. Si trabaja en geometría real, allí habrá de parar en seco. Ahora bien, si sigue adelante con la ayuda de los números complejos, verá cómo la recta y la circunferencia tienen en común los puntos $P=(6+2i, 3-4i)$ y $Q=(6-2i, 3+4i)$. Entonces, si en la geometría sobre los números reales se afirma que una recta y una circunferencia se cortan *como mucho* en dos puntos, en la geometría sobre los números complejos podemos asegurar que se cortan *exactamente* en dos puntos (aunque puedan estar superpuestos si son tangentes). La curva de ecuación $X^2+Y^2=0$, que en el plano real consta de un único punto, en el complejo se desdobra en las rectas $X+iY=0$ y $X-iY=0$.

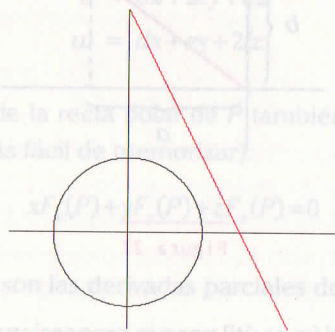


Figura 28

Plücker sacó un extraordinario partido de la introducción de los números complejos en la geometría. Definió las coordenadas homogéneas complejas del mismo modo que las reales, y dio a los puntos $J=(1, i, 0)$ y $J^*=(1, -i, 0)$, los llamados *puntos cíclicos*, la importancia que merecían. Estos puntos, cuya existencia ya había sido postulada por Poncelet, son así llamados porque por ellos pasan todas las circunferencias del plano. Es más, ninguna otra curva

de segundo grado pasa por ellos. En efecto, consideremos una cónica en coordenadas cartesianas ordinarias:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+eY+f=0$$

La escribimos en coordenadas homogéneas:

$$ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2=0$$

e imponemos que pase por uno de los puntos cíclicos, pongamos el primero. Resulta entonces que $a+bi-c=0$, con lo cual $a=c$, $b=0$ y pasa también por el segundo. Además, como $a \neq 0$ y $c \neq 0$ (de lo contrario la cónica no sería tal), podemos suponer $a=c=1$, y la ecuación de la curva queda de este modo:

$$X^2+Y^2+dX+eY+f=0$$

Claramente, representa una circunferencia de centro el punto $(-d/2, -e/2)$ y radio igual a $\sqrt{(d/2)^2+(e/2)^2-f}$.

Las rectas que pasan por uno de los puntos cíclicos se llaman rectas *isótropas*, y son de la forma $X+iY+c=0$ ó $X-iY+c=0$. De cualquiera de las dos maneras, la pendiente es un número igual al opuesto de su inverso, entonces son perpendiculares a sí mismas. Las rectas isótropas (a las que el matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) llamaba rectas locas) solo se dejan ver en un punto.

Sirviéndose de los puntos cíclicos, Plücker dio una hermosa definición de foco de una cónica que le permitiría extender el concepto a curvas de grado superior. Un punto del plano de una cónica es un foco si las tangentes trazadas desde él pasan por los puntos cíclicos. Esta idea, lo vamos a ver, no es tan alambicada como parece. Pensemos en una elipse, cuya ecuación en forma reducida sabemos es $x^2/a^2+y^2/b^2=z^2$. Desde el foco $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ trazamos una tangente a la elipse. Si $P=(p, q, r)$ es el punto de contacto, su

ecuación es:

$$x \frac{p}{a^2} + y \frac{q}{b^2} - zr = 0$$

Los coeficientes p , q y r son las soluciones del sistema de dos ecuaciones que aparece a continuación. Una de ellas procede de suponer la recta tirada desde el foco, la otra de la pertenencia de P a la cónica.

$$\sqrt{a^2 - b^2} \frac{p}{a^2} - r = 0$$

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - r^2 = 0$$

Despejando r en la ecuación lineal y sustituyendo en la segunda llegamos a que $p^2/a^4 + q^2/b^4 = 0$. Ahora se abren dos posibilidades: o bien $p=q=0$, o bien $p=a^2$ y $q=ib^2$. La primera llevaría a que $p=q=r=0$, y esto carece de significado proyectivo, entonces solo queda la segunda, y de ella se deduce que $r = \sqrt{a^2 - b^2}$. La ecuación de la recta tangente es pues $x+iy - z\sqrt{a^2 - b^2} = 0$, y es evidente que pasa por J . El lector puede comprobar, de un modo similar a como se acaba de hacer, que la tangente a la elipse trazada desde uno de los puntos cíclicos pasa por uno de los focos, y también puede repetir el razonamiento para la hipérbola.

A pesar de las extraordinarias posibilidades analíticas que brindaban los objetos imaginarios en geometría (y a los que el mismo Poncelet no hizo ascos), Steiner los ignoró tercamente durante toda su vida y se refirió a ellos como las *sombras* o los *fantasmas* de la geometría.

Fórmula de Laguerre

Usando los elementos complejos introducidos por Plücker, Edmond Laguerre (1834-1886) logró definir el ángulo de dos rectas

mediante una razón doble, dando así base proyectiva a un concepto métrico. Sean las dos rectas a y b (y nada impide imaginar que pasan por el origen de coordenadas), y j y j^* las rectas isotropas de ecuaciones $X+iY=0$ y $X-iY=0$. Laguerre define el ángulo formado por a y b de este modo:

$$\text{áng.}(ab) = \frac{i}{2} \log(abjj^*)$$

Recordemos que la exponencial y el logaritmo de un número complejo $z=x+iy$ se definen de esta manera:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \log z = \log |z| + i \arg z$$

(donde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\arg z = \arctan y/x$).

Si las pendientes de a y b son $m = \tan \alpha$ y $n = \tan \beta$ (y tenemos presente la coincidencia entre la razón doble de cuatro rectas y la de sus pendientes) resulta que:

$$\begin{aligned} (abjj^*) &= \frac{m-i}{n-i} \frac{n+i}{m+i} = \\ &= \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} \frac{\cos \beta - i \sin \beta}{\cos \beta + i \sin \beta} = \\ &= e^{2i\alpha} e^{-2i\beta} = e^{2i(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

Por la misma definición de logaritmo:

$$\text{áng.}(ab) = \alpha - \beta = -\frac{1}{2i} \log(abjj^*) = \frac{i}{2} \log(abjj^*)$$

Siguiendo el camino abierto por Laguerre, Arthur Cayley (1821-1895) dio una definición proyectiva de la distancia entre dos puntos. Afirmó que las propiedades métricas de una figura F son las propiedades proyectivas de la figura formada por F con los puntos cíclicos. Esto le llevó a considerar a la geometría métrica como una parte de

la proyectiva y a decir, en 1859, una frase que se hizo célebre: “La geometría proyectiva es toda la geometría”.

Esbozo de un modelo para la geometría hiperbólica

El quinto postulado de Euclides afirma que por un punto exterior a una recta siempre pasa una paralela (y una sola). El incumplimiento de este postulado da lugar nuevas geometrías, las llamadas geometrías no euclídeas. Ahora bien, el quinto postulado puede dejar de ser cierto por dos razones diferentes. O bien porque por el punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela, o bien porque pasa más de una. En el primer caso tenemos la geometría elíptica y en el segundo la hiperbólica. Pues bien, con elementos tomados de la geometría proyectiva podemos fabricar un modelo para la geometría hiperbólica, que esbozaremos brevemente. Fue propuesto por Felix Klein (1849-1925), el más célebre de los discípulos de Plücker y su sucesor en el liderazgo de los métodos analíticos. Consideremos una elipse E . Sus puntos interiores serán los puntos de esta geometría, y las rectas los segmentos determinados por E sobre las rectas euclídeas. Dos figuras son iguales si una de ellas puede ser transformada en la otra mediante un movimiento. Entonces, en cuanto definamos los movimientos, sabremos lo que es la igualdad. Pues bien, llamaremos movimiento a las proyectividades del plano en sí mismo que dejan invariante a la elipse.

El quinto postulado claramente no funciona: Por un punto P exterior a la recta AB pasan dos rectas paralelas (es decir, que se cortan en puntos de la frontera de la elipse, que hacen el oficio de los puntos del infinito), como se ve en la Figura 29.

Como ejemplo de las muchas cosas que hacen falta para elaborar una geometría, veremos un artificio que permita hablar de distancia. Una definición de distancia, para ser útil, debe ser invariante frente los movimientos, y aditiva: si tres puntos están alineados, la distancia entre los extremos ha de ser la suma de las distancias

entre ellos y el punto intermedio. Además, la distancia de cualquier punto consigo mismo ha de ser cero. Si A y B son puntos interiores a E , y U y V los puntos en los que la recta determinada por ambos corta a la frontera, la distancia entre A y B se define de este modo:

$$d(A,B) = \frac{1}{2} \log(UVAB)$$

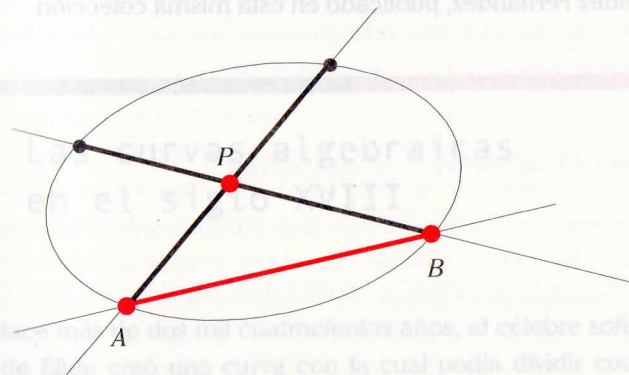


Figura 29

Como las proyectividades mantienen la razón doble, el primer requisito está garantizado. La comprobación del segundo viene a continuación:

$$d(A,B) + d(B,C) = \frac{1}{2} \log(UVAB) + \frac{1}{2} \log(UVBC) = \frac{1}{2} \log(UVAB)(UVBC)$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{UA}{VA} \frac{VB}{UB} \frac{UB}{VB} \frac{VC}{UC} = \frac{1}{2} \log \frac{UA}{VA} \frac{VC}{UC} = \frac{1}{2} \log(UVAC) = d(A,C)$$

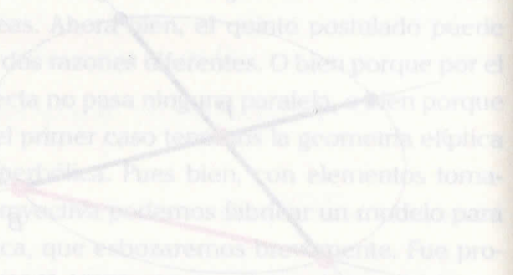
La del tercero es inmediata:

$$d(A,A) = \frac{1}{2} \log(UVAA) = \frac{1}{2} \log \frac{UA}{VA} \frac{VA}{UA} = \frac{1}{2} \log 1 = 0$$

Otra propiedad de esta distancia merece ser resaltada. La distancia de cualquier punto a la frontera de E es infinita (coherentemente con el papel que juega ésta como recta del infinito):

$$d(A,U)=\lim_{B \rightarrow U} d(A,B)=\lim_{B \rightarrow U} \frac{1}{2} \log \frac{UA}{VA} \frac{VB}{UB} = \infty$$

El modelo que se acaba de explicar pretende dar una idea de las posibilidades de la geometría proyectiva, no ser una introducción a las geometrías no euclídeas. Quien quiera saber de este tema hará bien en leer *Lobachevski. Un espíritu indomable*, de Santiago Fernández Fernández, publicado en esta misma colección.



5 Las curvas algebraicas en el siglo XVIII

Hace más de dos mil cuatrocientos años, el célebre sofista Hipias de Élida creó una curva con la cual podía dividir cualquier ángulo en tres partes aproximadamente iguales. Algunos años después Dinostrato descubrió que también podía ser utilizada para cuadrar el círculo. Por esta razón, una curva que en justicia debiera ser llamada *trisectriz de Hipias*, pasó a la historia con el nombre de *cuadratriz de Dinostrato*. La idea de Hipias de resolver un problema fabricando una curva a propósito tuvo muchos seguidores, y las curvas así halladas pronto empezaron a ser estudiadas por sí mismas. Menecmo, hermano mayor de Dinostrato, descubrió las secciones cónicas, y cortando dos de ellas consiguió duplicar el cubo. Arquímedes estudió la espiral, con la que se puede trisecar un ángulo, y con este mismo fin Nicomedes, algo posterior, inventó la *concoide*. Diocles, contemporáneo de Nicomedes, ideó otra curva, la *cisoide*, que sirve para duplicar el cubo.

Con el siglo XVII llega la geometría analítica, que permite asociar una ecuación a cada curva. El estudio de las ecuaciones descubre semejanzas y diferencias entre las curvas que antes eran invisibles, y permite distinguir entre curvas algebraicas (como la cisoide,

la conoide, y las cónicas) y trascendentes (como la cuadratriz o la espiral). Descartes excluye sumariamente de la geometría a las segundas, a las que llama *curvas mecánicas*, y solo se interesa por las primeras. Según él, las curvas algebraicas debían clasificarse según el grado de la ecuación que las define, y estudiar cada clase con métodos propios. Retrocediendo un siglo en relación con el capítulo anterior, vamos a ver que se hizo en el siglo XVIII con las curvas algebraicas, para poder después entender lo que hicieron nuestros protagonistas con ellas en el XIX.

Newton y la clasificación de las cúbicas

Siguiendo el consejo de Descartes, Newton emprendió el estudio sistemático de las cúbicas o curvas de grado tres. Los resultados de sus investigaciones fueron redactados en 1676, pero no aparecieron hasta 1704, en un opúsculo titulado *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Esta obra ha sido editada por la Real Sociedad Matemática Española en una traducción de José Luis Arantegui anotada por Antonio Durán. Parte de lo que viene a continuación es deudora de esas notas.

La *Enumeratio* es, en esencia, una clasificación de las cúbicas con coeficientes reales. En un primer nivel, Newton distinguirá cuatro casos. Parte de la ecuación general de una cúbica (que supone irreducible):

$$(Mx^3 + Nx^2y + Pxy^2 + Qy^3) + (Rx^2 + Sxy + Ty^2) + (Ux + Vy) + W = 0$$

e intenta deshacerse, mediante un cambio de variable, del término en y^3 . Para ello resuelve la ecuación algebraica:

$$f(z) = Qz^3 + Pz^2 + Nz + M = 0$$

que tiene al menos una solución real α . Hacemos un cambio de ejes, poniendo y en el lugar de x y $\alpha y + x$ en el de y , y la ecuación

de la curva se convierte en esta otra:

$$x(Ax^2 + Bxy + Cy^2) + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky + L = 0$$

en la cual $A=Q$, $B=3Q\alpha+P$ y $C=3Q\alpha^2+2P\alpha+N$. Si α es una solución simple, entonces $C=f'(\alpha) \neq 0$. En esta situación podemos imaginar $C=1$, y reordenamos la ecuación del siguiente modo:

$$(x+G)y^2 + (Bx^2 + Fx + K)y + Ax^3 + Ex^2 + Hx + L = 0$$

lo que demuestra que la recta $x=-G$ es asíntota de la curva (téngase presente que el binomio $x+G$ no puede dividir simultáneamente al término independiente y al coeficiente de y , porque entonces la cúbica no sería irreducible).

Pensemos ahora en las rectas de ecuación $x=u$, paralelas a la asíntota. Si cortan a la curva, lo hacen en dos puntos, salvo que el número u anule el discriminante de la ecuación en y . Ahora bien, dicho discriminante es un polinomio de cuarto grado:

$$(Bx^2 + Fx + K)^2 - 4(x+G)(Ax^3 + Ex^2 + Hx + L)$$

Este polinomio no es cero (si lo fuera, $x+G$ dividiría a $Bx^2 + Fx + K$, como consecuencia también a $Ax^3 + Ex^2 + Hx + L$, y esto no es posible). Se anula pues, como mucho, en cuatro valores de u . Ahora bien, sabemos desde Viète que la suma de las raíces de una ecuación de grado n es igual al opuesto del coeficiente de grado $n-1$ dividido por el de grado n . Entonces, si (u, v) es el punto medio de los puntos (u, v_1) y (u, v_2) , en los que la recta $x=u$ corta a la cúbica, sucede lo siguiente:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = -\frac{Bu^2 + Fu + K}{2(u+G)}$$

Luego el lugar geométrico de los puntos medios es la hipérbola de ecuación:

$$2y(x+G) + Bx^2 + Fx + K = 0$$

Esta hipérbola se llama *hipérbola diametral* asociada a la asíntota $x = -G$, la cual a su vez tiene como asíntotas a $x = -G$ e $y = -(B/2)x + BG/2 - F/2$. Esto se puede ver en la Figura 30, donde aparece (en color negro) la cúbica de ecuación:

$$(x+1)y^2 + (x^2+1)y + x^3 - 3x^2 = 0$$

y la hipérbola diametral asociada a la asíntota $x = -1$ (en rojo), cuya ecuación es $2y(x+1) + x^2 + 1 = 0$. La otra asíntota de la hipérbola (que ya no lo es de la curva) es la recta de ecuación $x + 2y = 1$.

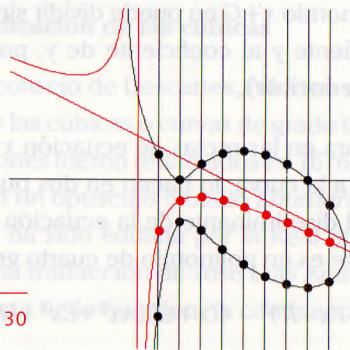


Figura 30

Interesa, por razones de simplicidad, que las asíntotas de la hipérbola sean los ejes de coordenadas. Ahora bien, la transformación necesaria para ello *no* hace aparecer ningún término en y^3 , luego nada impide suponer que la cúbica está ya referida a sus asíntotas. Entonces $G=B=F=0$, y la ecuación queda de esta forma:

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(donde $e=K$, $a=-A$, $b=-E$, $c=-H$ y $d=-L$). Y este es el primero de los cuatro casos. La hipérbola diametral es $xy = -e/2$, que degenera cuando $e=0$.

Si la ecuación $f(z)=0$ carece de soluciones simples, la multiplicidad de α es tres, y en consecuencia $B=C=0$. La de la curva es ahora de esta manera:

$$Ax^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky + L = 0$$

Se abren ahora tres posibilidades. Si $G=0$ y $F \neq 0$, las rectas de la forma $x=u$ cortan a la curva en un solo punto, salvo $x = -K/F$, que es la única asíntota. Si transformamos esta asíntota en el eje de ordenadas (e igual que antes, damos esta transformación por hecha) entonces $K=0$, y la ecuación de la curva resulta ser:

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(a = -A/F, b = -E/F, c = -H/F \text{ y } d = -L/F).$$

Si $G \neq 0$, el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos interceptados sobre la cúbica por las rectas del haz $x=u$ es la recta de ecuación:

$$Fx + 2Gy + K = 0$$

Si transformamos esta recta en el eje de ordenadas (y suponemos que ya lo es), resulta que $F=K=0$, y la ecuación de la curva es la siguiente:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(a = -A/G, b = -E/G, c = -H/G \text{ y } d = -L/G).$$

Si $G=F=0$, la curva es sencillamente:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(a = -A/K, b = -E/K, c = -H/K \text{ y } d = -L/K).$$

En el primer caso distinguió Newton cuatro clases, según fueran los signos de a . A las de la primera clase ($a > 0$) las llamo *hipérbolas redundantes*, a las de la segunda ($a < 0$), *hipérbolas defectivas*, a las de la tercera ($a=0$ y $b \neq 0$), *hipérbola parabólica*, y a las de la cuarta ($a=0$ y $b=0$), *hiperbolismo de cónicas*.

Las de la primera clase tienen como asíntotas a las rectas:

$$x=0 \quad y=\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right) \quad y=-\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

La hipérbola diametral asociada a la primera asíntota, se vio antes, es la de ecuación $xy+e/2=0$. Un cálculo elemental demuestra que las de las asociadas a las dos últimas son las que vienen a continuación:

$$y^2 - 3ax^2 + 2xy\sqrt{a} - 2bx + e\sqrt{a} - c = 0$$

$$y^2 - 3ax^2 - 2xy\sqrt{a} - 2bx - e\sqrt{a} - c = 0$$

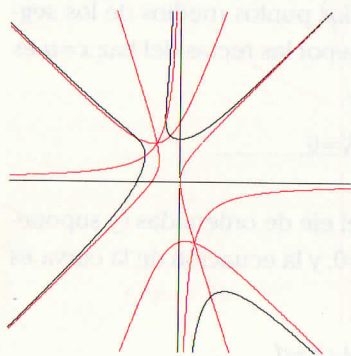


Figura 31

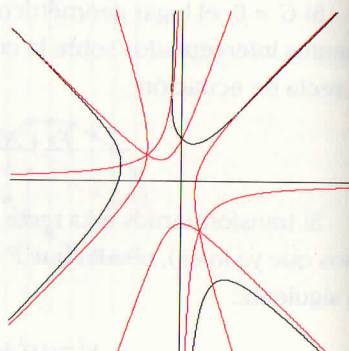


Figura 32

Las condiciones para que degeneren son, respectivamente, las siguientes: $e=0$, $b^2 - 4ac = -4ae\sqrt{a}$ y $b^2 - 4ac = 4ae\sqrt{a}$. Claramente, si dos de ellas degeneran, también lo hace la tercera. De este modo, Newton agrupa a las hipérbolas redundantes en cuatro géneros, según que ninguna de las hipérbolas diametrales sea degenerada, lo sea una, lo sean las tres y $b \neq 0$ (lo cual significa que las tres asíntotas se cortan en tres puntos distintos) o lo sean las tres y $b=0$ (las tres asíntotas son concurrentes). En las Figuras 31, 32, 33 y 34 se pueden ver (en negro) las cúbicas de ecuaciones $xy^2+y=x^3+x^2+x+1$, $xy^2+y=x^3+x^2+1$, $xy^2=x^3+2x^2+x+1$ y $xy^2=x^3+1$, que correspon-

den a cada uno de estas clases. Las hipérbolas diametrales están dibujadas en color rojo.

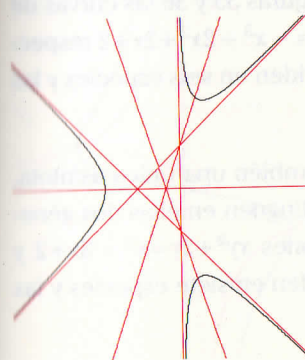


Figura 33

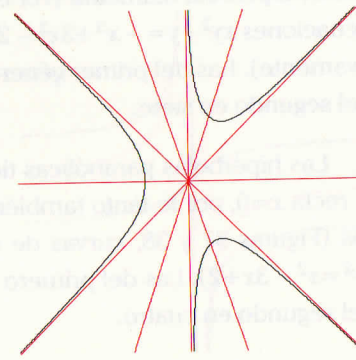


Figura 34

Después, estudiando todas las situaciones posibles entre las raíces del polinomio del segundo miembro, Newton distinguió nueve especies entre las de primer género, doce entre la de segundo, dos entre las de tercero y nueve en las del cuarto. Solo la primera clase del primer caso abarca ya treinta y dos especies.

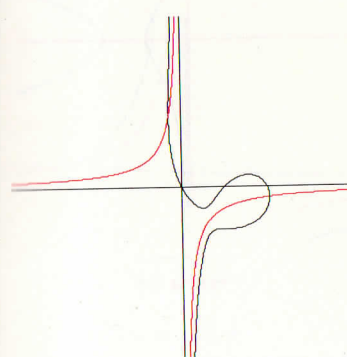


Figura 35

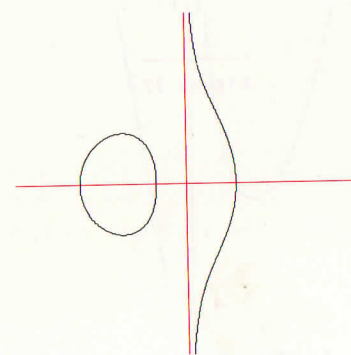


Figura 36

Las hipérbolas defectivas tienen una sola asíntota, luego pueden ser de dos géneros, según sea o no degenerada su correspondiente hipérbola diametral (ver en las Figuras 35 y 36 las curvas de ecuaciones $xy^2+y=-x^3+3x^2-2x$ y $xy^2=-x^3-2x^2+2x+2$ respectivamente). Las del primer género se dividen en seis especies y las del segundo en siete.

Las hipérbolas parabólicas tienen también una única asíntota, la recta $x=0$, por lo tanto también se distinguen en ellas dos géneros (Figuras 37 y 38, curvas de ecuaciones $xy^2+2y=x^2-3x+2$ y $xy^2=x^2-3x+2$). Las del primero se dividen en siete especies y las del segundo en cuatro.

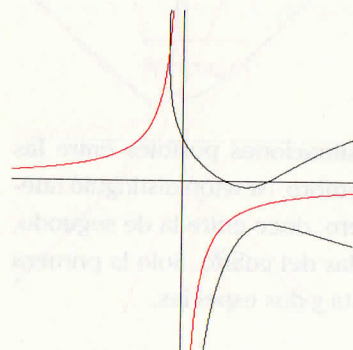


Figura 37

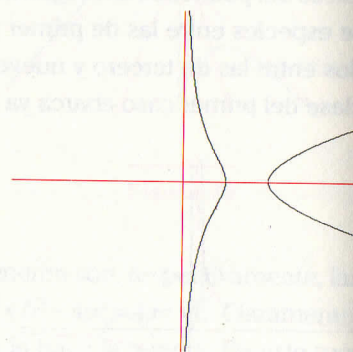


Figura 38

Los hiperbolismos de cónicas dan lugar a tres géneros, según sea $c > 0$ (hiperbolismo de hipérbola), $c < 0$ (hiperbolismo de elipse) ó $c=0$ (hiperbolismo de parábola). Las curvas de ecuaciones $xy^2+5y=-x$, $xy^2+y=x$, y $xy^2+3y=1$, (Figuras 39, 40 y 41) son ejem-

plos de cada uno de ellos. El primer género abarca cuatro especies, el segundo tres y el tercero dos. Y ya van sesenta y cinco especies.

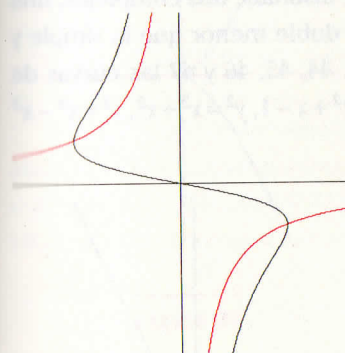


Figura 39

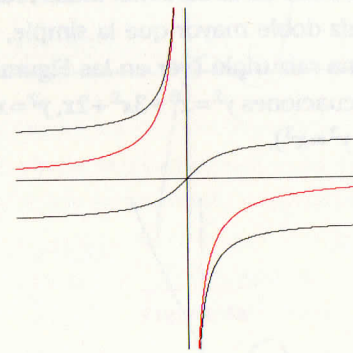


Figura 40

Las del segundo caso tienen como única asíntota a la recta $x=0$, y necesariamente $d \neq 0$ (de lo contrario se desdoblaría en una cónica y una recta). Solo hay una especie, la curva llamada *tridente de Descartes*. La curva de la Figura 42 es el tridente de ecuación $xy=x^3-2x^2-x+2$.

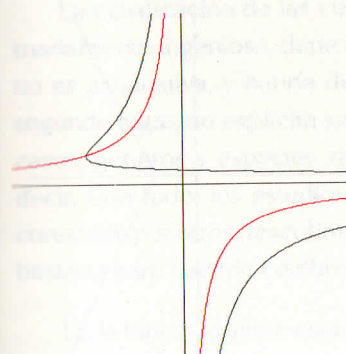


Figura 41

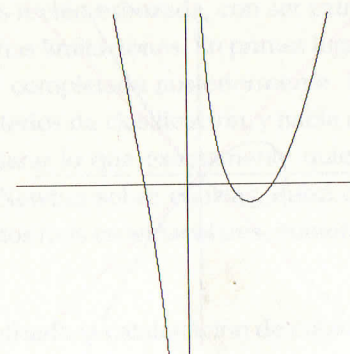


Figura 42

Las del tercer caso, a las que Newton llamó parábolas divergentes, abarcan cinco especies, según se porten las raíces del polinomio de la derecha: todas reales y distintas, dos complejas, una raíz doble mayor que la simple, una doble menor que la simple y una raíz triple (ver en las Figuras 43, 44, 45, 46 y 47 las curvas de ecuaciones $y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x$, $y^2 = x^3 - x^2 + x - 1$, $y^2 = x^3 + x^2$, $y^2 = x^3 - x^2$ e $y^2 = x^3$).

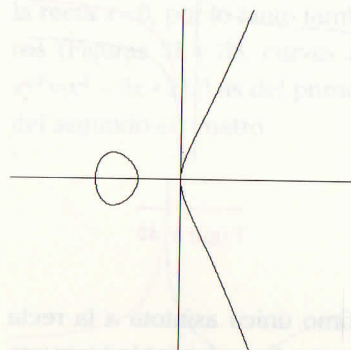


Figura 43

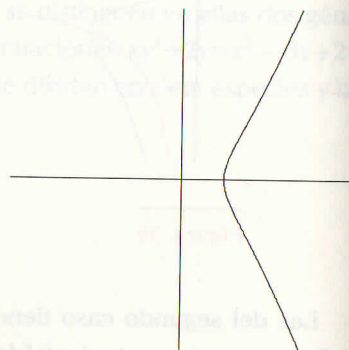


Figura 44

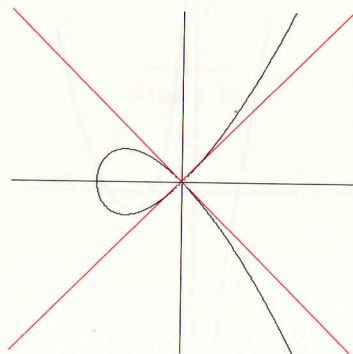


Figura 45

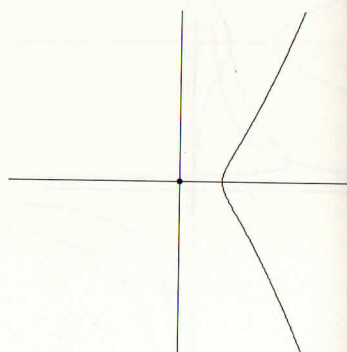


Figura 46

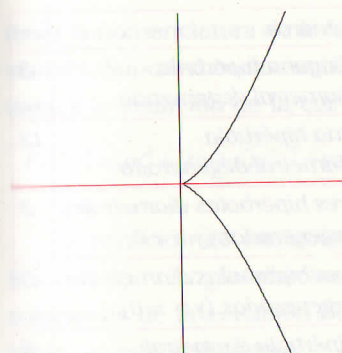


Figura 47

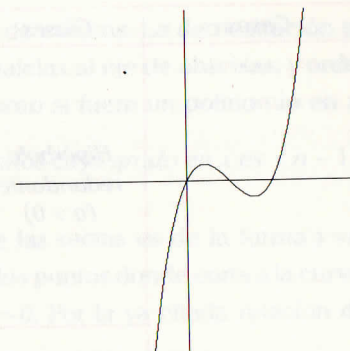


Figura 48

La razón de habernos demorado en las especies de parábolas divergentes está en que cualquier curva de tercer grado puede convertirse mediante proyecciones y secciones en una de ellas. Se verá esto más adelante.

En el cuarto caso no hay asíntotas, y solo da lugar a una especie, la número setenta y dos. La Figura 48 representa la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2x$.

La clasificación de las cúbicas recién esbozada, con ser extremadamente ingeniosa, tiene algunas limitaciones. En primer lugar, no es exhaustiva, y habría de ser completada posteriormente. En segundo lugar, no explicita sus criterios de clasificación, y habla de casos, géneros y especies sin aclarar lo que exactamente quiere decir. Con todo, los estudios de Newton sobre cúbicas, quizá oscurecidos por otros descubrimientos más espectaculares, hubieran bastado para hacerle célebre.

En la tabla siguiente está sintetizada la catalogación de cúbicas que se acaba de exponer. Las cifras de la última columna indican el número de especies.

Casos	Clases	Géneros	
$xy^2+ey=$ ax^3+bx^2+cx+d	Hipérbola redundante ($a > 0$)	Ninguna hipérbola diametral degenerada	9
		Una hipérbola diametral degenerada	12
		Tres hipérbolas diametrales degeneradas ($y b \neq 0$)	2
		Tres hipérbolas diametrales degeneradas ($y b = 0$)	9
	Hipérbola defectiva ($a < 0$)	Hipérbola diametral no degenerada	6
		Hipérbola diametral degenerada	7
	Hipérbola parabólica ($a = 0$ y $b \neq 0$)	La hipérbola diametral es no degenerada	7
		La hipérbola diametral es degenerada	4
	Hiperbolismo de cónicas ($a = b = 0$)	Hiperbolismo de hipérbola ($c > 0$)	4
		Hiperbolismo de elipse ($c < 0$)	3
		Hiperbolismo de parábola ($c = 0$)	2
$xy=ax^3+bx^2+cx+d$			1
$y^2=ax^3+bx^2+cx+d$			5
$y=ax^3+bx^2+cx+d$			1

Diámetro de una curva algebraica

En las primeras páginas de la *Enumeratio* se demuestra una propiedad de las cúbicas que, formulada adecuadamente, es cierta para curvas de grado cualquiera: si una curva algebraica es cortada por un haz de rectas paralelas, los centros de gravedad de los puntos de corte de cada una de ellas con la curva están sobre una misma recta. A esta recta la llamó Newton *diámetro* de la curva, para man-

tener la nomenclatura de la teoría de cónicas. La demostración es sencilla. Suponemos las rectas paralelas al eje de abscisas, y ordenamos la ecuación de la curva como si fuera un polinomio en x :

$$F(x, y) = ax^n + (by + c)x^{n-1} + \text{sumandos cuyo grado en } x \text{ es } < n - 1$$

La ecuación de cualquiera de las rectas es de la forma $y=v$. Sean $u_1, u_2, \dots, u_n$ las abscisas de los puntos donde corta a la curva, soluciones de la ecuación $F(x, v) = 0$. Por la ya citada relación de Viète, sucede lo siguiente:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = -\frac{bv+c}{a}$$

Ahora bien, las coordenadas (u^*, v^*) del centro de gravedad de los n puntos son:

$$u^* = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \quad v^* = v$$

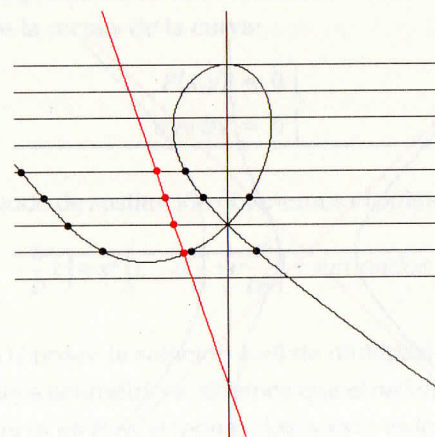


Figura 49

En consecuencia $u^* = -(bv^* + c)/na$, y todos los centros de gravedad así obtenidos pertenecen a la recta de ecuación $nax + by = c$.

En la Figura 49 se puede ver un diámetro de la curva de ecuación $x^3 + x^2y + y^3 + 3x^2 - 3y^2 = 0$. Cada tres puntos negros en una misma recta tienen su centro de gravedad en el punto rojo alineado con ellos. Si $n=2$ llegamos un teorema ya conocido: los puntos medios de las cuerdas paralelas de una cónica están alineados (ver Figura 17).

En 1762, el matemático inglés Edward Waring (1734-1793) dio a conocer, en un trabajo titulado *Proprietates algebricarum curvarum*, un resultado en la línea de los descubrimientos de Newton sobre diámetros de curvas. Demostró que el centro de gravedad de los puntos en los cuales una recta corta a una curva es el mismo que el de los puntos en los que corta a sus asíntotas. La Figura 50 representa la curva de ecuación $xy^2 = x^3 + 3x^2 + x - 1$, cuyas asíntotas son las rectas $x=0$, $y=x+3/2$ e $y=-x-3/2$. La recta $y=2$ encuentra a la curva en los puntos de abscisa $1, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$ (en negro en el dibujo), y a las asíntotas en los de abscisa $0, 1/2$ y $-7/2$ (en rojo). Ambos grupos de puntos tienen su centro de gravedad en $(-1, 2)$.

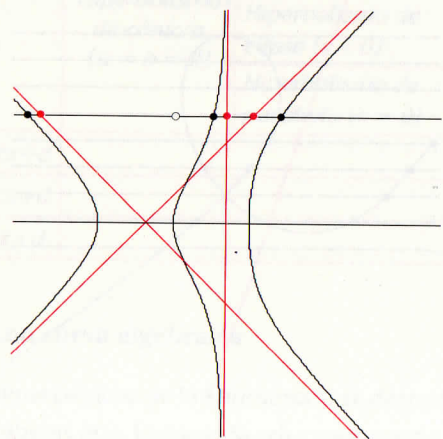


Figura 50

Aproximación de las ramas de una curva alrededor de un punto singular

Uno de los elementos más importantes que aparecen en las curvas de grado mayor que dos son los puntos *múltiples* o *singulares*, en los cuales la curva tiene varias tangentes (a veces superpuestas) porque pasa por ellos más de una vez. Consideremos un punto P de la curva, del cual supondremos, para mayor comodidad, que es el origen de coordenadas. Esto no es ninguna limitación: si $P=(p, q) \neq (0, 0)$, el comportamiento de la curva $F(x, y)=0$ en P es idéntico a la de ecuación $F(x+p, y+q)=0$ en el punto $(0, 0)$. Sea pues una curva algebraica cualquiera que pase por el origen:

$$F(x, y) = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \text{sumandos de grado} > 2$$

Si $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, entonces diremos que el punto $P=(0, 0)$ es un punto simple, y la ecuación de la única recta tangente es $ax + by = 0$. Para ver qué significa esto, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y de la curva:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases}$$

Por el método de sustitución obtenemos el polinomio siguiente:

$$G(x) = F\left(x, -\frac{a}{b}x\right) = x^2\left(c - d\frac{a}{b} + e\frac{a^2}{b^2}\right) + \text{sumandos de grado} > 2$$

Entonces G posee la solución $x=0$ de multiplicidad mayor que uno. En términos geométricos, diremos que el *orden de contacto* de la recta y la curva en P es al menos dos, y esto es lo que queremos expresar cuando decimos que la recta es tangente a la curva en el punto P .

Si $a=b=0$, pero el polinomio de segundo grado no es idénticamente nulo, éste es el producto de dos polinomios de primer grado que corresponden a *dos* rectas tangentes a la curva en el

origen. En efecto, si $cx^2+dx+ey^2=(mx+py)(nx+qy)$, resolvemos los sistemas que vienen a continuación:

$$\left. \begin{array}{l} F(x,y) = 0 \\ mx+py = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} F(x,y) = 0 \\ nx+qy = 0 \end{array} \right\}$$

El primero de ellos da lugar al polinomio:

$$H(x)=F\left(x, -\frac{m}{p}x\right)=gx^3+\text{sumandos de grado} \geq 4$$

En este caso el cero es una raíz triple del polinomio H , y el orden de contacto de la curva con la recta es tres, dos por ser tangente a ella más uno por atravesarla (cuando es tangente a la otra recta, la de ecuación $nx+qy=0$). La resolución del segundo sistema nos lleva a un resultado complementario.

Un punto puede ser doble de tres maneras diferentes, según sea el signo del discriminante $\Delta=d^2-4ec$ del polinomio cuadrático de F . Cuando $\Delta > 0$, las dos rectas tangentes son rectas reales y distintas. El punto doble se llama entonces *punto doble ordinario* o *nodo* (ver la curva de la Figura 45, cuyas tangentes en el origen son $x+y=0$ y $x-y=0$). Si $\Delta=0$, las rectas tangentes están superpuestas. El punto doble recibe en este caso el nombre de *cúspide* (Figura 47). Si $\Delta < 0$, en el plano real no hay rectas tangentes y nuestro punto parece aislado (Figura 46). Pero si entramos en el plano complejo, las rectas tangentes son $x+iy=0$ y $x-iy=0$, y el origen es entonces el único punto visible de la rama de la curva que lo contiene.

Si $a=b=c=d=e=0$, pero existen sumandos grado tres, el punto singular es triple. Así sucede con la curva llamada *rosa de tres pétalos*, de ecuación $(x^2+y^2)^2+y^3-3x^2y=0$, cuyas tangentes en el origen son el eje de abscisas y las rectas $y-x\sqrt{3}=0$ e $y+x\sqrt{3}=0$ (Figura 51). En cambio, la curva de ecuación $(x^2+y^2)^3+x^3y-xy^3=0$, conocida como *rosa de cuatro pétalos*, carece de términos de grado menor o igual que tres, (pero no de cuatro) y el origen es entonces un punto cuádruple (Figura 52). En los dos últimos ejemplos, los puntos

múltiples son *ordinarios*, porque todas sus tangentes son distintas. Un punto múltiple ordinario de orden m ha de ser contabilizado como $m(m-1)/2$ puntos dobles. Esto es así porque cada una de las m ramas corta a cada una de las $m-1$ restantes. La división por dos se debe a que, razonando de este modo, cada rama fue contada dos veces.

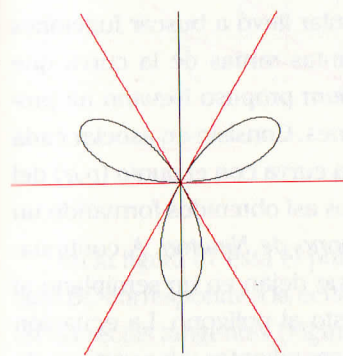


Figura 51

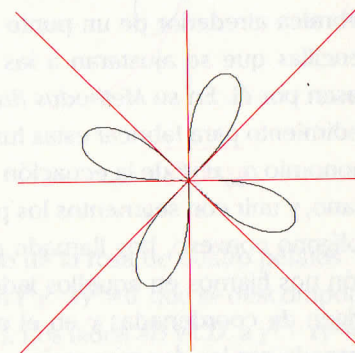


Figura 52

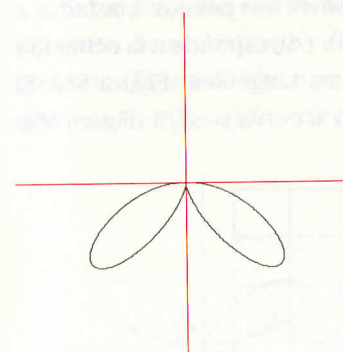


Figura 53

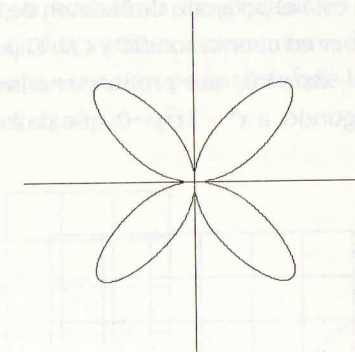


Figura 54

Las curvas de las Figuras 53 y 54, de ecuaciones $x^4+y^4+x^2y=0$ y $x^6+y^6-x^2y^2=0$ son sendos ejemplos de puntos triple y cuádruple no ordinarios.

Si P es un punto cualquiera de la curva, la condición necesaria y suficiente para que sea singular consiste en que $F_x(P)=F_y(P)=0$. Esto es evidente cuando $P=(0,0)$, porque entonces $F_x(P)=a$ y $F_y(P)=b$. En caso contrario, trasladamos la curva llevando P al origen, y también resulta fácil de comprobar.

La dificultad de estudiar el comportamiento de una curva algebraica alrededor de un punto singular llevó a buscar funciones sencillas que se ajustaran a las distintas ramas de la curva que pasan por él. En su *Methodus fluxionum* propuso Newton un procedimiento para fabricar estas funciones. Consiste en asociar cada monomio $a_{pq}x^p y^q$ de la ecuación de la curva con el punto (p,q) del plano, y unir con segmentos los puntos así obtenidos formando un polígono convexo, hoy llamado *polígono de Newton*. A continuación nos fijamos en aquellos lados que dejan en un semiplano al origen de coordenadas y en el opuesto al polígono. La ecuación formada por los dos monomios correspondientes a los vértices de uno de estos lados resulta ser la de una curva que se adapta muy razonablemente a una de las ramas de la curva inicial. En la Figura 55 está el polígono de Newton de la rosa de tres pétalos. Los lados a tener en cuenta son BC y CD . El primero corresponde a la ecuación $y^3 - 3x^2y=0$, que proporciona las rectas tangentes (Figura 51). El segundo, a $x^4 - 3x^2y=0$, que da lugar a la curva $y=x^2/3$ (Figura 56).

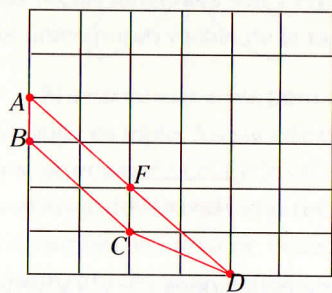


Figura 55

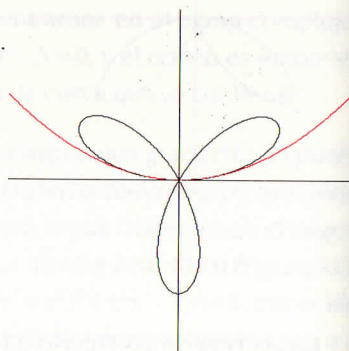


Figura 56

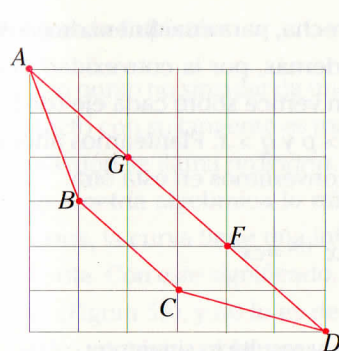


Figura 57

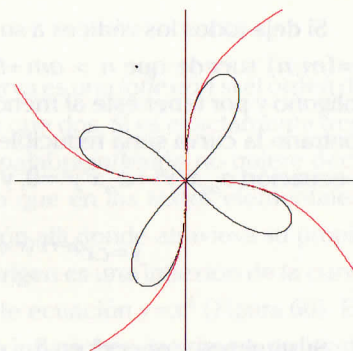


Figura 58

En la figura 57 está el polígono de la rosa de cuatro pétalos. El lado BC corresponde a la ecuación $x^3y - xy^3=0$, que se descompone en las rectas tangentes (Figura 52). Los lados AB y CD , a $y^6 - xy^3=0$ y $x^6 + x^3y=0$ que proporcionan las curvas $x=y^3$ e $y=-x^3$ respectivamente (Figura 58).

El fundamento del método que acabamos de explicar es el siguiente. Sean $A=(p,q)$ y $B=(r,s)$ dos vértices consecutivos del polígono (Figura 58 bis) e $y=ax+b$ la ecuación de la recta que los contiene ($a=(s-q)/(r-p)$ y $b=(rq-ps)/(r-p)$).

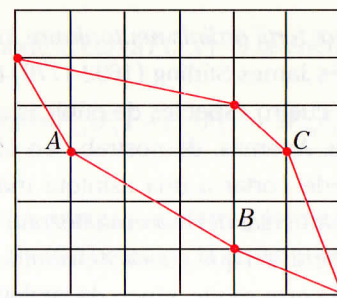


Figura 58 bis

Si deja todos los vértices a su derecha, para cualquiera de ellos $C=(m,n)$ sucede que $n > am+b$. Además, por la convexidad del polígono y por tener éste al menos un vértice sobre cada eje (de lo contrario la curva sería reducible), $r > p$ y $q > s$. Planteamos ahora la ecuación $a_{pq}x^p y^q + a_{rs}x^r y^s = 0$, y la convertimos en esta otra:

$$y = cx^{(p-r)/(s-q)} = cx^{-1/a} = cx^k$$

Sustituimos y por cx^k en $a_{mn}x^m y^n$, y resulta lo siguiente:

$$a_{mn}x^m (cx^k)^n = a_{mn}c^n x^{m+kn}$$

Ahora bien:

$$m+kn = \frac{am-n}{a} = \frac{n-am}{-a} > kb = \frac{rq-ps}{q-s} > \frac{rq-rs}{q-s} = r$$

Entonces, el orden de contacto en el origen entre la curva dada y la de ecuación $y=cx^k$ es mayor que la más grande de las abscisas de los extremos del segmento.

Los trabajos de Stirling

En su obra *Lineæ tertii ordinis newtonianæ*, publicada en 1717, completaba el inglés James Stirling (1692-1770) la clasificación de Newton añadiendo cuatro especies de cúbicas a las setenta y dos que éste catalogara. Además, demostraba en ella que una curva de grado n no puede cortar a una asíntota más de $n-2$ veces (lo cual es un caso particular del teorema Bézout, que sería probado posteriormente), y también que queda determinada en general por $n(n+3)/2$ puntos. De este modo, cinco de sus puntos identifican a una cónica, nueve a una cúbica y catorce a una cuártica.

Puntos de inflexión

Un punto no singular de una curva es una *inflexión* si el orden de contacto con su tangente es mayor que dos. Si es exactamente tres, la inflexión se llama *ordinaria*. La palabra *inflexión* no quiere decir en geometría algebraica lo mismo que en los textos elementales. En estos, la curva tiene una inflexión allí donde atraviesa su propia tangente. Con este significado, el origen es una inflexión de la curva $y=x^3$ (Figura 59), y no lo es de la de ecuación $y=x^4$ (Figura 60). En nuestro contexto, ambos casos son inflexiones, la primera ordinaria y la segunda no ordinaria.

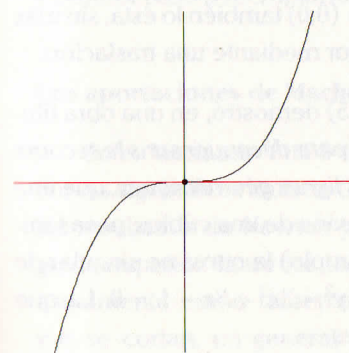


Figura 59

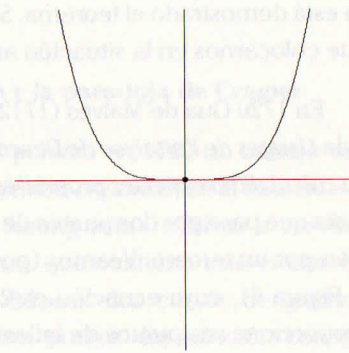


Figura 60

Los lugares donde la curva $F(x,y)=0$ se encuentra con esta otra:

$$H^*(x,y) = F_{xx}(F_y)^2 + F_{yy}(F_x)^2 - 2F_{xy}F_xF_y = 0$$

son precisamente los puntos singulares y los de inflexión. En efecto, supongamos que $P=(0,0)$ está en la curva y no es punto singular. Entonces F tiene la forma:

$$F(x,y) = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \text{sumandos de grado } > 2$$

(con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$). Si P es una inflexión, el cero es una raíz triple del polinomio:

$$G(x) = F\left(x, -\frac{a}{b}x\right) = x^2\left(c - d\frac{a}{b} + e\frac{a^2}{b^2}\right) + \text{sumandos de grado} > 2$$

Y para que esto sea así, ha de anularse el último paréntesis, de modo que $cb^2 + ea^2 - dab = 0$. Teniendo presente que:

$$F_x(P) = a \quad F_y(P) = b \quad F_{xx}(P) = 2c \quad F_{yy}(P) = 2e \quad F_{xy}(P) = d$$

ya está demostrado el teorema. Si $P \neq (0,0)$ también lo está, sin más que colocarnos en la situación anterior mediante una traslación.

En 1720 Gua de Malves (1712-1785) demostró, en una obra titulada *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés des lignes géométriques*, que una recta que pase por dos puntos de inflexión de una cúbica, pasa también por un tercero. Veamos (por ejemplo) la curva no singular de la Figura 61, cuya ecuación es $2x^3 + y^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$. La que proporciona sus puntos de inflexión es

$$y(4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1) + y^4(2x - 1) = 0.$$

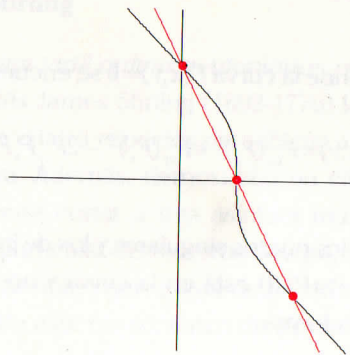


Figura 61

Suponiendo $y \neq 0$, dividimos entre y , sustituimos y^3 por $-2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ (la ecuación de la curva nos autoriza a ello), y tenemos que $x^2 - x = 0$. De aquí salen ya dos puntos de inflexión, $P = (0,1)$ y $Q = (1,-1)$. Si $y=0$, la ecuación de la curva se convierte en $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$, cuya única solución real proporciona el punto de inflexión $R = (1/2, 0)$. Los tres están sobre la recta $2x + y = 1$.

Jean Paul de Gua de Malves fue un abate, natural de Carcassonne, que llegó a ser profesor del Colegio de Francia. En 1745 se le encomendó la dirección de la *Enciclopedia*, pero a partir de 1747, por razones poco conocidas, el editor le rescindió el contrato y Diderot pasó a reemplazarle.

Las aportaciones de Maclaurin y la paradoja de Cramer

Colin Maclaurin (1698-1746) publicó en 1720 un trabajo sobre curvas algebraicas titulado *Geometrica organica*, en el cual extiende los resultados de Newton y de Stirling sobre cúbicas a curvas de grado superior. Entre los teoremas que contiene está el conocido usualmente como teorema de Bézout: dos curvas de grados m y n se cortan, en general, en mn puntos. En relación con esto, Maclaurin llamó la atención sobre la siguiente paradoja (llamada habitualmente *paradoja de Cramer*, en honor a su redescubridor): si dos cúbicas se cortan en nueve puntos, por dichos nueve puntos no pasa una única cúbica (como había señalado Stirling).

Otro resultado importante que contiene la *Geometrica* es que el número de puntos dobles de una curva irreducible de grado n no supera a $(n-1)(n-2)/2$. Esto es inmediato de ver. Si tuviera $(n-1)(n-2)/2 + k$ puntos dobles, por ellos y por otros $n-k-2$ puntos de la curva pasaría otra curva de grado $n-2$. Efectivamente:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k + (n-k-2) = \frac{(n-2)(n+1)}{2}$$

El número de puntos comunes de ambas curvas (teniendo presente que cada punto doble debe ser contado dos veces) es el siguiente:

$$2 \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k \right] + (n-k-2) = n(n-2) + k > n(n-2)$$

y esto es imposible. También introdujo Maclaurin la noción de *deficiencia* (precedente de lo que más tarde se llamaría *género*) de una curva algebraica como el máximo número posible de puntos singulares menos el que en realidad tiene. De este modo, la deficiencia de una cónica siempre es cero, la de una cúbica puede ser cero o uno, la de una cuártica tres, dos uno o cero.

De cómo una cúbica cualquiera se transforma en una parábola divergente

Hacia el final de la *Enumeratio* se afirma que cualquier cúbica es la proyección de una de las cinco parábolas divergentes, pero esto no fue justificado hasta 1733 por Alexis Clairaut (1713-1765) y François Nicole (1683-1758) quienes, con diferencia de muy pocos días, presentaron sendas demostraciones a la *Académie Royale des Sciences* de París. Más tarde se encontró otra entre los papeles de Newton. Aquí se demostrará utilizando coordenadas homogéneas. Ya sabemos que no fueron descubiertas hasta muy entrado el siglo XIX, pero la simplificación que ello supone justifica el anacronismo.

Veremos más adelante que cualquier cúbica posee algún punto de inflexión. Si aceptamos de momento este resultado, siempre la podemos colocar de tal modo que éste sea el origen y la recta tangente en él sea el eje de abscisas. Entonces su ecuación carece de término independiente y de los sumandos en X y en X^2 :

$$Y + AX + BY^2 + CX^3 + DX^2Y + EXY^2 + FY^3 = 0$$

En coordenadas homogéneas:

$$yz^2 + Axyz + By^2z + Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3 = 0$$

Intercambiamos y y con z y volvemos a las coordenadas cartesianas ordinarias:

$$Y^2 + AX + BY + CX^3 + DX^2 + EX + F = 0$$

Sumando y restando algunas cosas, la última ecuación se transforma en esta otra:

$$\left(Y + \frac{A}{2}X + \frac{B}{2} \right)^2 + CX^3 + \left(D - \frac{A^2}{4} \right)X^2 + \left(E - \frac{AB}{2} \right)X + F - \frac{B^2}{4} = 0$$

Una transformación afín que ponga $Y - (A/2)X - B/2$ en lugar de la Y , y deje intacta la X , convierte a la ecuación anterior en la parábola divergente:

$$Y^2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

(en la cual $a = -C$, $b = A^2/4 - D$, $c = AB/2 - E$ y $d = B^2/4 - F$).

Las asíntotas de una curva algebraica

El *Traité des courbes algébriques* publicado en 1756 por Mathieu Goudin (1734-1817) y Achille Pierre Dionis du Séjour (1734-1794) aporta como novedad que una curva C de orden n no puede tener más de n asíntotas (por ser este el número máximo de cortes que puede tener con la recta del infinito) ni más de $n(n-1)$ tangentes que pasen por un punto $P = (a, b)$ (ni por lo tanto en la misma dirección). Esto es así porque, si la ecuación de la curva es $F(x, y) = 0$, los puntos de tangencia son los de intersección de C con la de grado $n-1$ que viene a continuación:

$$(x-a)F_x(x,y)+(y-b)F_y(x,y)-nF(x,y)=0$$

Esta curva se llama *polar* de C respecto del punto P . Veamos porqué las cosas son así. La ecuación de la recta tangente en un punto $Q=(u,v)$ de la curva es $(x-u)F_x(Q)+(y-v)F_y(Q)=0$. Si esta recta pasa por P , entonces $(a-u)F_x(Q)+(b-v)F_y(Q)=0$. A esta ecuación le sumamos $nF(Q)=0$, y ya tenemos que $Q=(u,v)$ está sobre la curva polar.

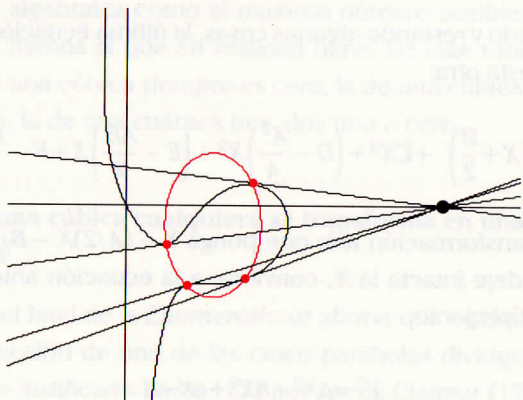


Figura 62

La Figura 62 representa la cúbica $x^3+xy^2-3x^2+2x+y=0$ (en negro) y su curva polar respecto del punto $P=(4,0)$, la cónica de ecuación $9x^2+4y^2-20x+2y+8=0$ (en rojo). En cambio, la polar en relación al mismo punto de la cuártica $x^4+y^4+y^2-9x^2-1=0$ es la cúbica de ecuación $8x^3-9x^2+y^2-36x-2=0$ (Figura 63). En ambos casos se puede ver cómo los puntos donde se cortan la curva y su polar son los de contacto con las tangentes que pasan por P . Si la curva es una cónica, su polar es una recta que ya en su momento llamamos recta polar de la cónica (Figura 15).

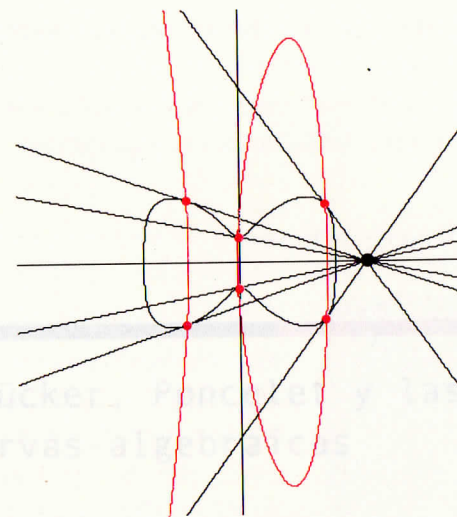


Figura 63

6 Plücker, Poncelet y las curvas algebraicas

El tema de las curvas algebraicas quedó un tanto estancado entre 1756 y 1825, año en que se retomó aplicando eficazmente los métodos proyectivos. Se ha de tener presente en adelante que si la ecuación de una curva en coordenadas homogéneas es $F(x,y,z) = 0$, para todo punto singular $P = (a,b,c)$ ha de suceder lo siguiente:

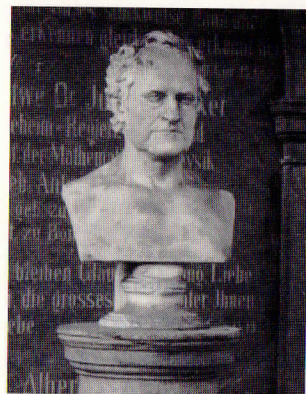
$$F_x(a,b,c) = F_y(a,b,c) = F_z(a,b,c) = 0$$

Que esta definición es coherente con la anterior es una consecuencia elemental del teorema de Euler para funciones homogéneas. Una función F de varias variables (tres, para lo que ahora interesa) es homogénea de grado n si para todo número t y todo punto $P = (x,y,z)$ ocurre que $F(tx,ty,tz) = t^n F(x,y,z)$. Cuando F es una función polinómica, esta condición equivale a la de tener idéntico grado todos los monomios que la componen. Y al transformar la ecuación de una curva algebraica plana de coordenadas ordinarias a homogéneas, la nueva ecuación es un polinomio homogéneo del mismo grado pero con tres variables. El teorema de Euler afirma que las funciones homogéneas de grado n cumplen lo siguiente:

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=nF(x,y,z)$$

A la vista de esta fórmula, es claro que si $F_x(P)=F_y(P)=0$ para un punto P de la curva, también sucede que $F_z(P)=0$.

De nuevo la paradoja de Cramer



Busto de Plücker en su tumba en el cementerio de Bonn (Alemania).

En su *Sistema de geometría analítica*, publicado en 1834, abordó Plücker el problema de los puntos de intersección de dos curvas. Representó todas las curvas que pasan por los puntos de corte de dos curvas de idéntico grado C^* y C^{**} de la forma siguiente (ya propuesta por Gabriel Lamé (1795-1870) en el año 1818, pero a la que Plücker extrajo el mayor rendimiento):

$$C=C^*+\lambda C^{**}$$

en donde la variable λ toma todos los valores posibles. Mediante este esquema aclaró la paradoja de Cramer. Ya vimos que una curva de grado n queda determinada por $n(n+3)/2$ puntos. Por otra parte, dos curvas de grado n se cortan en n^2 puntos. Pero, del tres en adelante, n^2 supera a $n(n+3)/2$, de modo que por $n(n+3)/2$ de los n^2 puntos en los que se cortan dos curvas de grado n , pasa más de una curva con dicho grado. Para explicar esta paradoja, pensemos en $[n(n+3)/2] - 1$ puntos y busquemos dos curvas C^* y C^{**} de grado n que los contengan. Si completamos la colección con un punto más, podemos encontrar un valor de λ que proporcione una curva C de grado n que pase por todos ellos. Las curvas C , C^* y C^{**} tienen en común, no solo el conjunto original, sino los n^2 que comparten

C^* y C^{**} . Esto quiere decir que para todo conjunto de $[n(n+3)/2] - 1$ puntos existe otro (dependiente del primero) cuya cardinalidad es:

$$n^2 - \left[\frac{n(n+3)}{2} - 1 \right] = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

y tales que cualquier curva de grado n que pase por los primeros pasa también por los dependientes. De este modo, cualquier cúbica que pase por ocho puntos de corte de otras dos, pasa también por el noveno.

Este resultado proporciona una hermosa demostración del teorema de Pascal según el cual los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica se cortan en tres puntos alineados (Figuras 18 y 19). Llamemos C a la cónica y r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 y r_6 a las rectas que forman el hexágono. Sean $P=r_1 \cap r_4$, $Q=r_2 \cap r_5$ y $R=r_3 \cap r_6$ los puntos de encuentro de los pares de lados opuestos, y r la recta que pasa por P y Q . Fabricamos entonces las siguientes cúbicas: $C_1=C \cup r$, $C_2=r_1 \cup r_3 \cup r_5$ y $C_3=r_2 \cup r_4 \cup r_6$. Los puntos comunes a C_2 y C_3 son los vértices del hexágono, junto con P , Q y R . En principio, todos ellos salvo R están en C_1 . Pero por lo que acabamos de ver, R (el noveno punto) también ha de pertenecer a C_1 . Pero es evidente que $R \notin C$, de modo que $R \in r$, y P , Q y R están, en consecuencia, sobre una misma recta.

Para curvas de grados distintos, llegó Plücker al siguiente resultado (obtenido casi al mismo tiempo por Carl Gustav Jacobi (1804-1851)): si C es una curva de grado n , y fijamos $mn - (n-1)(n-2)/2$ de sus puntos (con $m > n$), quedan determinados sobre ella otros $(n-1)(n-2)/2$ puntos tales que toda otra curva C^* de grado m que contenga los primeros, contiene también los segundos.

Un teorema de Poncelet sobre cúbicas



Poncelet con uniforme militar.

El siguiente bellísimo resultado, del cual el teorema de Pascal es un caso particular, fue descubierto por Poncelet, y dado a conocer el año 1832 en el *Journal de Crelle*. Si un hexágono está inscrito en una cúbica, y dos de sus tres puntos de intersección de lados opuestos pertenecen a ella, también pertenece el tercero. Solo hay que repetir el argumento empleado más arriba, sin más que sustituir la cúbica $C_1 = C \cup r$ por la que nos ocupa. En la Figura 64 se puede ver esta situación. La ecuación de la cúbica es $6x + 36y - 5x^2 - 30xy - 21y^2 + x^3 + 3x^2y + 7xy^2 + 3y^3 = 0$, los vértices del hexágono (en rojo) son los puntos $A = (1,1)$, $B = (2,0)$, $C = (3,0)$, $D = (3,3)$, $E = (0,4)$ y $F = (0,3)$, y las intersecciones de los lados opuestos (en negro), los puntos $P = (0,0)$, $Q = (3, -3)$ y $R = (-3,5)$.

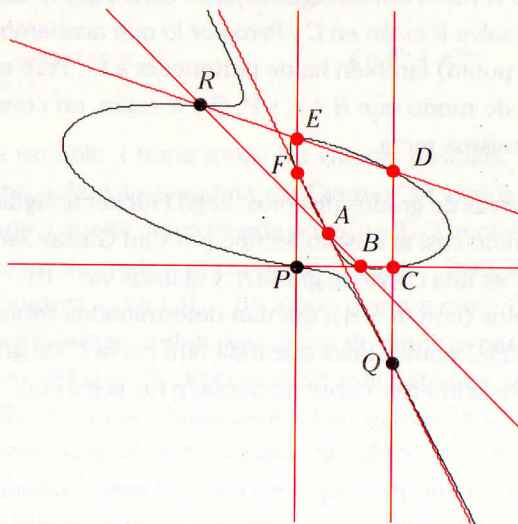


Figura 64

La curva dual

Se llama *curva dual* de una curva C a aquella cuyos puntos, interpretados como coordenadas de rectas, suministran la ecuación de la familia de rectas tangentes a C (llamada *ecuación tangencial* de la curva). El grado de la curva dual se llama la *clase* de C , y coincide con el número de tangentes que se pueden trazar a ella desde un punto genérico. Esto es así porque a rectas concurrentes le corresponden por dualidad puntos alineados, y el grado de una curva coincide con el máximo de puntos colineales que pueden contener. Por los resultados obtenidos por Goudin y Du Séjour en 1756, sabemos que si el grado de C es n , su clase no puede superar a $n(n-1)$.

Se ilustrará esto con varios ejemplos. Comenzaremos por la cúbica de ecuación $x^3 - y^2z + 2yz^2 - z^3 = 0$, (Figura 65, en negro). Si (u,v,w) son las coordenadas de la recta tangente a un punto (x,y,z) de la curva, ha de suceder lo siguiente:

$$u = 3x^2 \quad v = 2z(z-y) \quad w = -y^2 + 4yz - 3z^2$$

De la primera igualdad y la ecuación de la curva tenemos que $u^3 = 27z^2(y-z)^4$. Sumando las dos últimas se deduce que $v+w = -(z-y)^2$, con lo cual $v^2(v+w) = -4z^2(z-y)^4$. En consecuencia la ecuación tangencial es:

$$4u^3 + 27v^2(v+w) = 0$$

Reinterpretamos las coordenadas de rectas como coordenadas de puntos, y llegamos a la curva dual:

$$4x^3 + 27y^3 + 27y^2z = 0$$

Es de grado tres, entonces ésta es la clase de la cúbica. El punto $(0,1,1)$ es una cúspide de la curva, y la tangente en ella (la recta de

ecuación $y - z = 0$) se convierte en el punto $(0, -1, 1)$, que resulta ser una inflexión de la curva dual (en rojo en la misma Figura 65). Esto no es casualidad, una cúspide de una curva siempre da lugar a una inflexión en su dual. También podemos observar algo sobre lo que se volverá después: la presencia de una cúspide rebaja la clase de la curva en tres unidades.

Buscaremos ahora la dual de la curva $(x-z)^3 + z(x-z)^2 - y^2z = 0$, que es la de la Figura 45 trasladada una unidad a su derecha (Figura 66, en negro). Se trata ahora de eliminar x, y y z de entre la ecuación de la curva y las que vienen a continuación:

$$u = 3(x-z)^2 + 2z(x-z) \quad v = -2yz \quad w = -2(x-z)^2 - 2z(x-z) - y^2$$

Sumando la primera con la tercera y, teniendo presente la ecuación de la curva, resulta que $u+w = -(x-z)^3/z$. De esta igualdad se deducen estas otras dos: $u/(u+w) = -3z/(x-z) - 2z^2/(x-z)^2$ y $(v/(u+w))^2 = 4z^3/(x-z)^3 + 4z^4/(x-z)^4$. Por facilitar los cálculos, llamaremos u^* a $u/(u+w)$, v^* a $v/(u+w)$, y t a $z/(x-z)$, y llegamos a dos ecuaciones en t :

$$2t^2 + 3t + u^* = 0 \quad 4t^4 + 4t^3 - (v^*)^2 = 0$$

De la primera de ellas despejamos la incógnita y resulta lo siguiente:

$$t = \frac{-3 + \sqrt{9 - 8u^*}}{4} \quad t^2 = \frac{9 - 4u^* - 3\sqrt{9 - 8u^*}}{8}$$

$$t^2 + t = \frac{3 - 4u^* - \sqrt{9 - 8u^*}}{8}$$

Estas expresiones permiten deshacernos de la t :

$$(v^*)^2 = 4t^2(t^2 + t) = \frac{27 - 36u^* + 8(u^*)^2 - (9 - 8u^*)\sqrt{9 - 8u^*}}{8}$$

A continuación eliminamos el denominador, aislamos la raíz cuadrada y elevamos ambos miembros al cuadrado. Después agrupamos los términos semejantes y nos encontramos con lo siguiente:

$$4((v^*)^2 - (u^*)^2) - 4(u^*)^3 + 36u^*(v^*)^2 - 27(v^*)^2 = 0$$

Sustituimos u^* y v^* por lo que realmente son, y ya tenemos la ecuación tangencial:

$$4(v^2 - u^2)^2 - 4u^3(u+w) + 36uw^2(u+w) - 27v^2(u+w)^2 = 0$$

De ella obtenemos la de la curva dual (Figura 66, en rojo), la cual, después de las simplificaciones pertinentes, puede ser escrita de este modo:

$$4y^4 + x^2y^2 - 4x^3z - 18xy^2z - 27y^2z^2 = 0$$

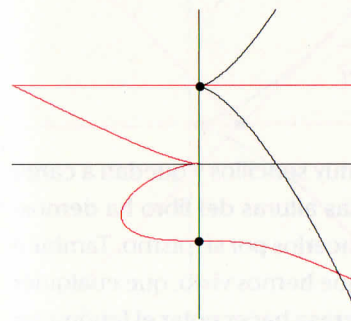


Figura 65

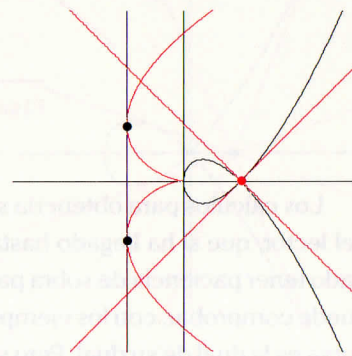


Figura 66

La cúbica que estamos considerando es pues de clase cuatro. Vemos cómo la existencia de un nodo rebaja la clase de una curva en dos unidades y que éste hace aparecer una *bitangente* en su dual (esto es, una tangente en dos lugares distintos). Esto último es

bastante esperable: dos tangentes en un punto se convierten por dualidad en una tangente para dos puntos, cuyas coordenadas se corresponden con las de las rectas tangentes en el punto doble.

La ecuación de la dual de la curva $x^3 + y^3 - z^3 = 0$, conocida como *cúbica de Fermat* (Figura 67) es la siguiente:

$$x^6 + y^6 - 2x^3y^3 + 2x^3z^3 + 2y^3z^3 + z^3 = 0$$

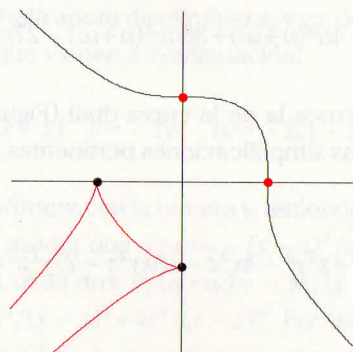


Figura 67

Los cálculos para obtenerla son muy sencillos y quedan a cargo del lector, que si ha llegado hasta estas alturas del libro ha demostrado tener paciencia de sobra para hacerlos por sí mismo. También puede comprobar, con los ejemplos que hemos visto, que cualquier curva es la dual de su dual. Pero sí interesa hacer notar el fenómeno contrario a la conversión de cúspides en inflexiones que observamos en el primer ejemplo. Las inflexiones ordinarias de la curva en los puntos $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$ dan lugar a las cúspides que tiene la curva dual en $(-1,0,1)$ y $(0,-1,1)$. De hecho, en los dos primeros ejemplos la curva dual tiene una cúspide en el origen procedente de una inflexión de la cúbica en el infinito. También conviene advertir que la ausencia de singularidades en una curva hace que su clase sea la mayor posible.

La primera fórmula de Plücker

Terminó el apartado anterior aludiendo a la variación de la clase de una curva por la presencia de puntos singulares. En éste intentaremos verlo más claramente. La Figura 68 representa la curva $x^3 - y^2 = 0$, y un punto exterior desde el cual se pueden trazar tres tangentes a ella. No existen otras, ni desde el punto señalado en el dibujo ni desde ningún otro. Por esta razón es de clase tres, aunque la de una cúbica puede llegar hasta seis. En la Figura 69 vemos la curva $x^3 + x^2 - y^2 = 0$, un punto exterior y cuatro tangentes que pasan por él. Las posibilidades son mayores, pero sigue sin alcanzar el seis. Una cúspide, lo sabíamos, limita más las posibilidades que un nodo. Es cierto que en ambos dibujos la posición del punto es privilegiada, porque las tangentes a la curva tiradas desde él son todas reales, lo cual no sucede siempre, pero esto no resta credibilidad a todo lo que se acaba de decir.

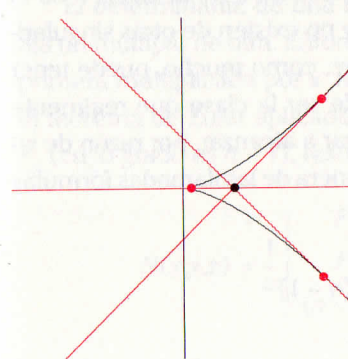


Figura 68

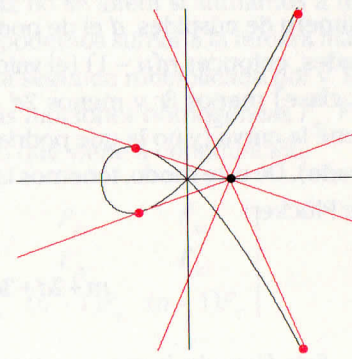


Figura 69

Ahora observemos la curva de la Figura 70. La ecuación de la curva en ella representada es $x^3 + x^2 - y^2 + 0,05 = 0$, la misma que la de la Figura 69, más un número muy pequeño. Pero esta ligerísima perturbación basta para deshacer el nodo, el número de tangentes que se pueden trazar desde un punto del plano que la contiene es

seis, y la clase alcanza su valor máximo. Desaparecidas todas las singularidades, no hay razón para que no sea así.

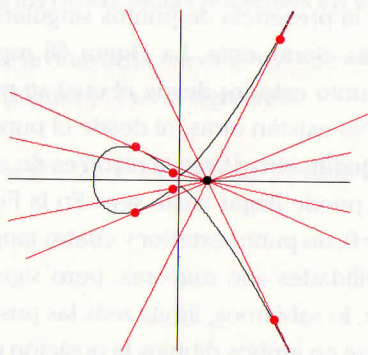


Figura 70

Entonces, si n es el grado de una curva, m la clase, r es el número de cúspides, d el de nodos, y no existen de otras singularidades, entonces $n(n-1)$ (el valor que, como mucho, puede tener la clase) menos $3r$ y menos $2d$ ha de ser la clase que realmente tiene la curva (y no la que podría llegar a alcanzar, por razón de su grado). De este modo, tenemos la primera de las llamadas fórmulas de Plücker:

$$m+2d+3r=n(n-1)$$

Esta fórmula, junto con otras tres que en seguida se verán, fue descubierta por Plücker y dada a conocer en su *Teoría de las curvas algebraicas*, publicada en 1839. Pronto conoceremos la segunda.

EL hessiano de una curva

A cada función homogénea $F(x,y,z)=0$ de grado n vamos a asociarle otra de grado $3(n-2)$, también homogénea, mediante un determinante llamado *hessiano* de F :

$$H(x,y,z) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{vmatrix}$$

Consideremos ahora las curvas algebraicas $F = 0$ y $H = 0$. Sucede que los puntos donde ambas se cortan son, o bien los puntos singulares, o bien los puntos de inflexión de la primera. Para ver por qué esto es así, veremos cómo en el plano afín, sobre cualquier punto de F , esta condición se transforma en la que dimos unas páginas atrás. Para empezar, supondremos $z \neq 0$ y reescribiremos el determinante de esta manera:

$$H(x,y,z) = \frac{1}{z} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ zF_{zx} & zF_{zy} & zF_{zz} \end{vmatrix}$$

El determinante de una matriz no se altera si sumamos a una fila un múltiplo de otra. Entonces podemos sumar a la tercera fila la primera multiplicada por x , más la segunda multiplicada por y . Por el teorema de Euler aplicado a las funciones homogéneas F_x , F_y y F_z (cuyo grado es $n-1$), resulta lo que viene a continuación:

$$H(x,y,z) = \frac{1}{z} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ (n-1)F_x & (n-1)F_y & (n-1)F_z \end{vmatrix}$$

Repetimos el razonamiento con las columnas:

$$H(x,y,z) = \frac{n-1}{z^2} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & (n-1)F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & (n-1)F_y \\ F_x & F_y & (n-1)nF \end{vmatrix}$$

Entonces, si (x,y,z) es un punto sobre el cual se anula F , tenemos lo siguiente:

$$H(X, Y, 1) = (n-1)^2 H^*(X, Y)$$

Esta igualdad evidencia lo que se pretendía demostrar. Por dos razones, trabajar con H es más ventajoso que hacerlo con H^* . La primera, que H , abarca todo el plano proyectivo. La segunda, que el grado de H es $3(n-2)$, más pequeño que el de H^* , que puede llegar a valer dos unidades más.

La segunda fórmula de Plücker

Vamos a estudiar el orden de contacto entre una curva y su hessiana, según sea la naturaleza del punto de corte. Pensemos, por ejemplo, en la cúbica cuspidal $x^3 - y^2z = 0$. Para ella, $H(x, y, z) = 24xy^2$, que se desdobra en las recta $x=0$ (contada una vez) e $y=0$ (contada dos veces). El orden de contacto entre la primera recta y la curva en la cúspide es dos, el de la segunda tres, que computado dos veces da seis, y en total hacen ocho. Para la cúbica nodal $x^3 + x^2z - y^2z = 0$, $H(x, y, z) = 24xy^2 + 8y^2z - 8x^2z$, que tiene como tangentes en el punto $(0,0,1)$ a las rectas $x - y = 0$, $x + y = 0$. El orden de contacto de cualquiera de ellas con la curva es tres, luego el de H con F en el nodo es seis. Para la curva $x^3 - yz^2 = 0$, que posee una inflexión en el origen, $H(x, y, z) = -24xz^2$, que se descompone en una recta que no pasa por la inflexión y otra que sí pasa pero que no es allí tangente. El orden de contacto es uno.

Por el teorema de Bézout, F y H se cortan en $3n(n-2)$ puntos, pero cada cúspide ha de ser contada ocho veces y cada nodo seis. Llamamos i al número de inflexiones (cada una de ellas cuenta solo una vez) y tenemos la segunda fórmula de Plücker:

$$i + 6d + 8r = 3n(n-2)$$

De este resultado se deduce un teorema que ya ha sido utilizado anteriormente: toda cúbica tiene por lo menos una inflexión.

Tercera y cuarta fórmulas de Plücker

Aplicando las dos primeras fórmulas de Plücker a la curva dual (y recordando cómo se comportan cúspides y nodos), tenemos la tercera y la cuarta (t es el número de bitangentes):

$$n + 2t + 3i = m(m-1)$$

$$r + 6t + 8i = 3m(m-2)$$

Las cuatro fórmulas permiten catalogar las curvas irreducibles de un cierto grado según todas las posibles singularidades. Este procedimiento de clasificación se llama de *enumeración de constantes*. Para las cúbicas podemos fabricar la siguiente tabla:

d	r	t	i	m	g
0	0	0	9	6	1
1	0	0	3	4	0
0	1	0	1	3	0

La última columna corresponde al género, del que ya se habló en el capítulo anterior. Para las cuárticas la tabla es considerablemente más larga:

d	r	t	i	m	g
3	0	4	6	6	0
2	1	2	4	5	0
1	2	1	2	4	0
0	3	1	0	3	0
2	0	8	12	8	1
1	1	4	10	7	1
0	2	1	8	6	1
1	0	16	18	10	2
0	1	10	16	9	2
0	0	28	24	12	3

Para una curva de grado n sin singularidades siempre sabemos que:

$$m=n(n-1) \quad i=3n(n-2) \quad t=\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$

Fórmula de Klein

Una fórmula semejante a las de Plücker, pero en la que sólo están presentes los elementos reales de la curva, fue demostrada por Klein:

$$n+i+2t=m+r+2d$$

Las letras i , t , r y d significan respectivamente el número de inflexiones, bitangentes, retrocesos y puntos aislados reales. Su veracidad puede comprobarse en los ejemplos ya vistos y en los que todavía están por ver.

Representación paramétrica de una curva algebraica

Diremos que una curva algebraica $F(x,y)=0$ admite una representación paramétrica racional si existen funciones racionales Φ y Ψ tales que los puntos $x=\Phi(t)$ e $y=\Psi(t)$ están en la curva para cualquier valor de t . Tales curvas se llaman *unicursales*, y son (se verá después) aquellas de género cero. La circunferencia $x^2+y^2-1=0$, por ejemplo, es unicursal, porque posee las ecuaciones paramétricas $x=(t^2-1)/(t^2+1)$, $y=2t/(t^2+1)$. Las representaciones paramétricas, a veces, dejan al descubierto algunos puntos de la curva (en el caso que acabamos de ver, no hay valor de t que proporcione el punto $(1,0)$, que sí está en la circunferencia), pero mientras sean unos pocos, no es cosa de gran importancia.

La posibilidad de resolver elementalmente algunas integrales está relacionada con la de encontrar ecuaciones paramétricas ra-

cionales de ciertas curvas. Pensemos, por ejemplo, en la siguiente integral (P es un polinomio cualquiera):

$$\int \sqrt{P(x)} dx$$

Si la curva $y^2=P(x)$ es unicursal, sabemos de la existencia de dos funciones racionales Φ y Ψ , para las cuales $[\Psi(t)]^2=P[\Phi(t)]$. En consecuencia, el cambio de variable $x=\Phi(t)$ convierte a la raíz cuadrada en $\Psi(t)$, y la integral se transforma en esta otra:

$$\int \Psi(t) \Phi'(t) dt$$

Su integrando es una función racional, integrable elementalmente. Una cónica no degenerada carece de singularidades, entonces su género es cero y es unicursal. Por esta razón siempre se pueden resolver las integrales del tipo:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$$

Pero si el integrando es de grado tres o más, puede ser que sí o puede ser que no. La cúbica de ecuación $y^2=x^3+3x^2+2x$ (Figura 43) carece de singularidades, pero una cúbica puede tener como mucho un punto doble. Luego su género es uno, no admite representación paramétrica racional, y no es resoluble elementalmente la integral:

$$\int \sqrt{x^3+3x^2+2x} dx$$

La curva $y^2=x^3+x^2$ (Figura 45) tiene un punto doble, y esto es todo lo que puede permitirse una cúbica irreducible. Su género es cero, y sus ecuaciones paramétricas $x=t^2-1$ e $y=t(t^2-1)$ permiten transformar la integral:

$$\int \sqrt{x^3 + x^2} dx$$

en otra de integrando racional.

La relación entre el carácter unicursal de una curva y la anulación de su género se considerará en un caso particular. Imaginemos una curva $F(x,y) = 0$ de grado n con un punto múltiple ordinario en el origen de orden $n-1$. Esto equivale, ya lo vimos, a $(n-1)(n-2)/2$ puntos dobles, luego el género de F es cero. Vamos a dotarla de una representación paramétrica. Descomponemos la ecuación en la suma $F(x,y) = G(x,y) + J(x,y)$, donde G es la suma de los monomios de grado $n-1$ y J la de los de grado n . En un punto (x,y) de la curva sustituimos y por tx (lo que equivale a cortarla con la recta $y = tx$, que pasa por el punto singular) y resulta:

$$F(x, tx) = G(x, tx) + J(x, tx) = x^{n-1} [G(1, t) + xJ(1, t)] = 0$$

Dando por descontado $x \neq 0$, tenemos las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$x = \Phi(t) = -\frac{G(1, t)}{J(1, t)} \quad y = \Psi(t) = -t \frac{G(1, t)}{J(1, t)}$$

La idea geométrica subyacente a este procedimiento está en que cada una de las rectas del haz $y = tx$ corta a la curva en n puntos, pero como todas ellas pasan por el punto singular (que cuenta $n-1$ veces), sólo uno queda libre, y éste recorre la curva cuando las rectas giran alrededor del origen. Al desechar el punto múltiple, la abscisa del punto restante es solución de una ecuación de primer grado, y se puede despejar en función del parámetro t . Esto se ve en la Figura 71, donde está representada la curva $x^3 + x^2 - y^2 = 0$, cuyas ecuaciones paramétricas ya hemos visto cuáles son.

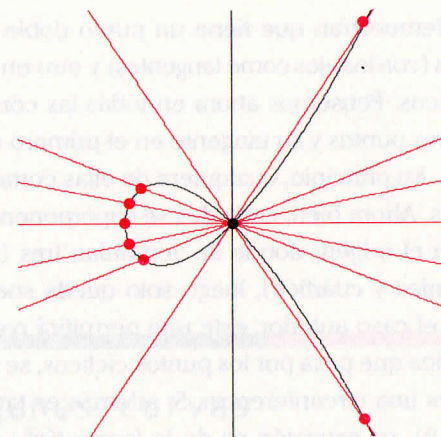


Figura 71

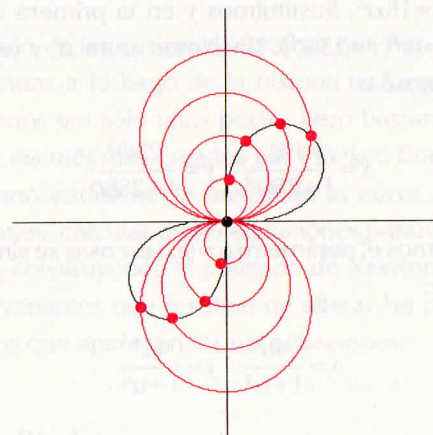


Figura 72

Este resultado demuestra que todas las cúbicas con un punto doble tienen género cero, así como las cuárticas con un punto triple, pero ni remotamente cubre todas las posibilidades. Vamos a ver esto con la cuártica de ecuación $(x^2 + y^2)^2 - 16xy = 0$, que carece de punto triple pero admite ecuaciones paramétricas. Unos cálcu-

los rutinarios demuestran que tiene un punto doble en el origen de coordenadas (con los ejes como tangentes) y otro en cada uno de los puntos cíclicos. Pensemos ahora en todas las cónicas que pasan por estos tres puntos y su tangente en el primero de ellos es el eje de abscisas. En principio, cualquiera de ellas corta a la cuártica en ocho lugares. Ahora bien, cada dos se superponen en un punto doble, salvo en el origen, donde se acumulan tres (por compartir tangente cónica y cuártica), luego solo queda suelto uno y, lo mismo que en el caso anterior, este uno permitirá parametrizar la curva. Una cónica que pasa por los puntos cíclicos, se demostró en su momento, es una circunferencia. Si además es tangente al eje de las x en $(0, 0)$, su ecuación es de la forma $t(x^2 + y^2) - y = 0$. El conjunto de cónicas resultó ser un haz de circunferencias (Figura 72). Eliminamos $x^2 + y^2$ entre la ecuación del haz y la de la cuártica, y obtenemos $y = 16xt^2$. Sustituimos y en la primera de ellas y llegamos a $16xt^2 = tx^2(1 + 256t^4)$. Dividimos entre xt , y ya tenemos las expresiones buscadas:

$$x = \frac{16t}{1 + 256t^4} \quad y = \frac{256t^3}{1 + 256t^4}$$

Si introducimos el parámetro $u = 4t$, las cosas se simplifican considerablemente:

$$x = \frac{4u}{1 + u^4} \quad y = \frac{4u^3}{1 + u^4}$$

Este procedimiento de parametrizar una curva a través de un haz de cónicas es aplicable a cualquier cuártica con tres puntos dobles, así como el de hacerlo con un haz de rectas funciona con cualquier curva algebraica que posea un punto de multiplicidad máxima. Por esta razón diremos que la *curva adjunta* de las curvas de grado n con una singularidad de orden $n - 1$ es la recta, y que la de las cuárticas con tres puntos dobles es la cónica.

7 Algunas curvas algebraicas notables

El inventario de las curvas algebraicas que han sido particularmente estudiadas a lo largo de la historia es larguísimo. En este capítulo veremos tan solo unas pocas, pero bastan para entender el alcance de los métodos creados por Plücker. Con cualquiera de ellas puede uno entretenerse buscando la curva dual, localizando las inflexiones, calculando las ecuaciones paramétricas cuando éstas existan, construyendo el polígono de Newton, y también explorando las variantes que resultan de alterar las relaciones entre los parámetros que aparecen en sus ecuaciones.

La cisoide de Diocles

Diocles fue un matemático alejandrino que vivió entre los siglos III y II a.C. Se le recuerda porque ideó una curva con la cual se resuelve aproximadamente el problema de duplicar el cubo. Resolver este problema significa dibujar un segmento, a partir de otro dado, de modo que el volumen del cubo cuya arista es el segundo segmento sea dos veces el que tiene como arista el primero.

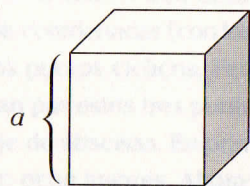


Figura 73

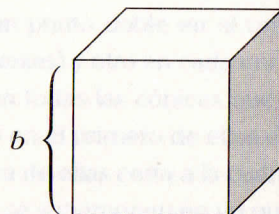


Figura 74

Si el cubo de la Figura 74 tiene un volumen doble que el de la Figura 73, ha de suceder que $2a^3 = b^3$, o lo que es igual, $1/\sqrt[3]{2} = a/b$. El segmento buscado es pues cuarta proporcional entre la unidad, la raíz cúbica de dos y la arista del cubo pequeño. Las cuartas proporcionales se pueden calcular con total exactitud con la sola ayuda de una regla, entonces el problema se reduce a encontrar un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$. Y esto es lo que consigue Diocles del modo que vamos a relatar.

Imaginemos dos rectas paralelas que distan entre ellas la unidad, y una circunferencia tangente a ambas. Los puntos de tangencia O y A son, obviamente, diametralmente opuestos. Cualquier recta que corte a la primera recta en O , encuentra a la circunferencia y a la otra recta en dos puntos M y N . El punto P , alineado con ellos y tal que $OP = MN$ está sobre la curva (Figura 75). Para llegar a su ecuación, supondremos que O es el origen de coordenadas y que las rectas son el eje de ordenadas y la de ecuación $x = 1$. Entonces, si $P = (x, y)$, y por la semejanza de los triángulos OMA y AMN , sucede lo que viene a continuación:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = OP = MN = AM \cot(90 - \theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{x}$$

Eliminando denominadores, llegamos a la ecuación cartesiana de la curva:

$$x(x^2 + y^2) = y^2$$

Tiene una cúspide en el origen, corresponde pues a la última fila de la tabla de las cúbicas, posee una sola inflexión, su clase es tres y su género es cero.

Para duplicar el cubo con la cisoide se hace de esta manera: señalamos sobre la recta de la izquierda un punto B tal que $OB = 2$. La recta AB corta a la cisoide en un punto P . El punto C , donde OP encuentra a la recta de la derecha resuelve el problema (Figura 76). En efecto, por la semejanza entre los triángulos BOA y PXA y entre los triángulos OCA y OPX , (y utilizando además la ecuación de la curva) tenemos lo siguiente:

$$\frac{OB}{OY} = \frac{OA}{XA} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow 2 = \frac{y}{1-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$\frac{CA}{OA} = \frac{PX}{OX} \Rightarrow CA = \frac{y}{x}$$

Comparando ambos resultados vemos que $CA = \sqrt[3]{2}$.

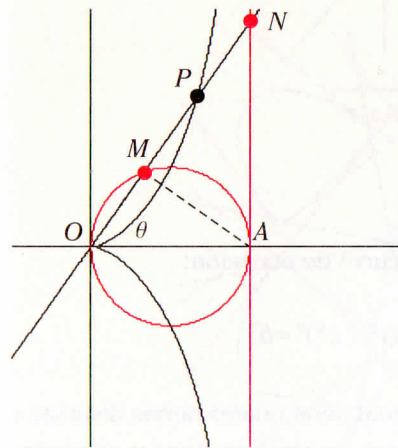


Figura 75

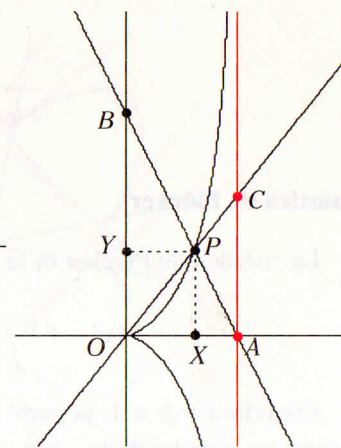


Figura 76

El folium de Descartes

De esta curva se ocupó por primera vez Descartes, interesado en estudiar el alcance de los métodos creados por Fermat para obtener tangentes. Más adelante, también Huygens y L'Hôpital trabajaron sobre ella. Su ecuación es:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Su aspecto el que se puede ver en la Figura 77. Tiene un nodo en el origen, entonces tiene tres inflexiones, su clase es cuatro y su género cero.

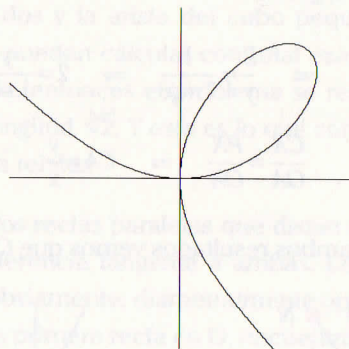


Figura 77

Cuártica de Plücker

La cuártica de Plücker es la curva de ecuación:

$$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - a^2)^2 = b^2$$

Cuando $a > b > 1$, la parte real tiene cuatro ramas distintas y carece de singularidades. Entonces su clase es doce y su género tres, pero lo más llamativo de ella es que sus 28 bitangentes son reales, y ninguna es la recta del infinito. En la Figura 78 se pueden

ver las cuatro bitangentes a la curva que lo son a una misma rama, las cuatro paralelas a ellas (en rojo) y las ocho paralelas a los ejes (en negro). En la figura 79 están las cuatro que pasan por el origen (en negro) y las ocho restantes (en rojo). En ambas figuras, para una mayor claridad, se han suprimido los ejes de coordenadas.

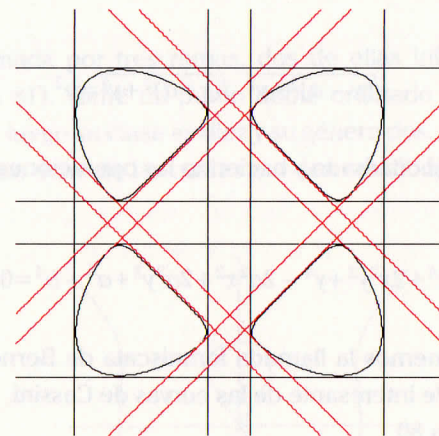


Figura 78

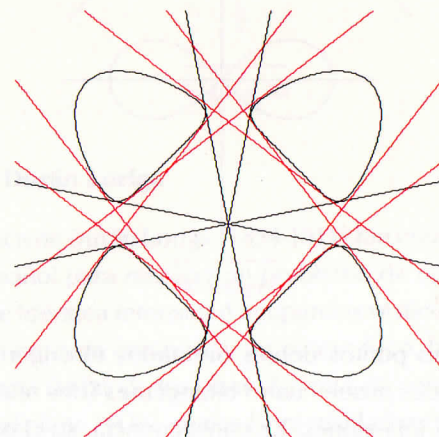


Figura 79

Lemniscata de Bernoulli

El astrónomo italiano Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) ideó una curva formada por los puntos cuyo producto de distancias a otros dos fijos es constante. Si las coordenadas de los puntos fijos son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, y el producto de las distancias es b^2 , la ecuación de la curva es:

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} \sqrt{(x+a)^2+y^2} = b^2$$

Elevando al cuadrado y haciendo las operaciones, se convierte en esta otra:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + a^4 - b^4 = 0$$

Si $a=b$, tenemos la llamada lemniscata de Bernoulli, un caso particularmente interesante de las curvas de Cassini, que se puede ver en la Figura 80.

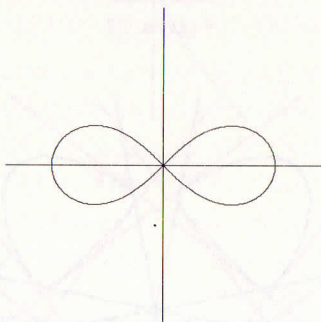


Figura 80

Tiene como puntos dobles ordinarios el origen y los puntos cíclicos, entonces posee cuatro bitangentes (dos reales y dos imaginarias) y seis inflexiones. En consecuencia, su clase es seis y su género cero. *Lemniscata* es una palabra griega que significa que algo tiene forma de ocho. Hay otras curvas lemniscatas, además de esta de Bernoulli que acabamos de ver.

La curva del diablo

La *curva del diablo*, estudiada por Cramer en 1750, es la cuártica de ecuación:

$$x^4 - y^4 - a^2x^2 + b^2y^2 = 0$$

Está formada por tres ramas, dos de ellas infinitas y la otra finita (Figura 81). Tiene un punto doble ordinario y ninguna otra singularidad, luego su clase es diez y su género dos. Además, posee 16 bitangentes, ocho de las cuales pueden ser dibujadas con suma facilidad.

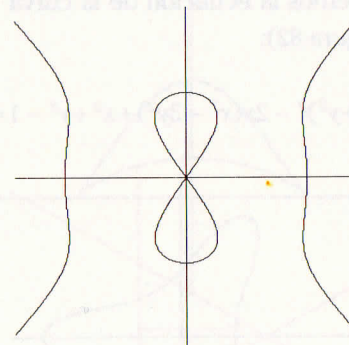


Figura 81

Cuártica de Durán Loriga

La cuártica de Durán Loriga (1854-1911) fue creada por este matemático español para resolver un problema de óptica. Tres focos luminosos de idéntica intensidad ocupan los vértices de un triángulo equilátero en cuyo centro hay un cuarto foco, la intensidad del cual es la suma de las de los otros. Se trata de conocer el lugar de los puntos del plano en los cuales la intensidad recibida por el foco central es la misma que la procedente de los tres periféricos. Para mayor simplicidad, colocamos los vértices en los puntos $(-1, 0)$,

$(1/2, \sqrt{3}/2)$ y $(1/2, -\sqrt{3}/2)$, que distan 1 del origen de coordenadas, donde suponemos está el foco central. La luminosidad que llega a un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente luminosa, por esta razón en los puntos (x, y) del lugar geométrico buscado sucede lo siguiente:

$$\frac{3}{x^2+y^2} = \frac{1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{1}{(x-1/2)^2+(y-\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{(x-1/2)^2+(y+\sqrt{3}/2)^2}$$

Después de eliminar los denominadores y agrupar los términos semejantes, obtenemos la ecuación de la curva (cuyo aspecto se puede ver en la Figura 82):

$$(x^2+y^2)^2 - 2x(x^2-3y^2) + x^2+y^2 - 1 = 0$$

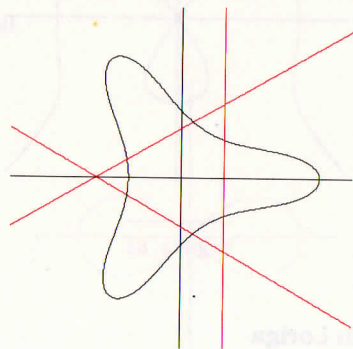


Figura 82

Las alturas del triángulo son ejes ternarios de simetría, y los puntos donde la curva se corta con ellos no son singulares. Entonces la cuártica carece de puntos múltiples, de lo contrario la triple simetría haría aparecer seis singularidades, más de lo que puede soportar una cuártica sin descomponerse en curvas de grado me-

nor. Igual que la de Plücker, su género es tres, pero a diferencia de ésta, solo cuatro bitangentes son reales (una de ellas es la recta del infinito).

El bicornio

El *bicornio* es una cuártica propuesta en 1897 por el matemático francés Longchamps, pero fue su paisano Brocard quien la bautizó con ese nombre. Su ecuación es la siguiente:

$$x^4 + x^2y^2 + 4ax^2y - 2a^2x^2 + 3a^2y^2 - 4a^3y + a^4 = 0$$

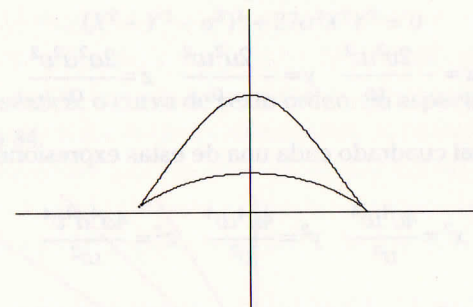


Figura 83

La curva posee sendas cúspides en los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ (ver Figura 83), y un nodo en el punto del infinito $(0, 1, 0)$. Tiene cuatro inflexiones, dos bitangentes, su clase es cinco y su género cero.

El asteroide

Recibe el nombre de *astroide* la curva cuyas tangentes interceptan con los ejes un segmento de longitud constante a . Entonces, si las coordenadas de una tangente genérica son (u, v, w) , la ecuación de la familia de tangentes es $(w/u)^2 + (w/v)^2 = a^2$.

Eliminando denominadores: $u^2w^2 + v^2w^2 - a^2u^2v^2 = 0$

Ya vimos que toda curva es la dual de su dual, y esto permite reconstruir su ecuación a partir de la de sus tangentes. Si $P=(x, y, z)$ es un punto de la curva dado en coordenadas homogéneas, ha de suceder lo siguiente:

$$x=2u(w^2 - a^2v^2) \quad y=2v(w^2 - a^2u^2) \quad z=2w(u^2 + v^2)$$

La ecuación tangencial permite sustituir $w^2 - a^2v^2$ por $-v^2w^2/u^2$ en la primera igualdad, $w^2 - a^2u^2$ por $-u^2w^2/v^2$ en la segunda, y $u^2 + v^2$ por $a^2u^2v^2/w^2$ en la tercera:

$$x = -\frac{2v^2w^2}{u} \quad y = -\frac{2u^2w^2}{v} \quad z = \frac{2a^2u^2v^2}{w}$$

Elevando al cuadrado cada una de estas expresiones:

$$x^2 = \frac{4v^4w^4}{u^2} \quad y^2 = \frac{4u^4w^4}{v^2} \quad z^2 = \frac{4a^4u^4v^4}{w^2}$$

De aquí podemos extraer dos resultados. El primero es el siguiente:

$$x^2y^2z^2 = 64a^4u^6v^6w^6$$

Y el segundo, este otro:

$$x^2 + y^2 - a^2z^2 = 4 \left(\frac{v^6w^6 + u^6w^6 - a^6u^6v^6}{u^2v^2w^2} \right)$$

Ponemos ahora $(u^2w^2 + v^2w^2)^3$ en lugar de $a^6u^6v^6$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - a^2z^2 &= 4 \left(\frac{-3u^4v^2w^6 - 3u^2v^4w^6}{u^2v^2w^2} \right) = \\ &= -12(u^2 + v^2)w^4 = -12a^2u^2v^2w^2 \end{aligned}$$

Elevamos al cubo el primero y el último eslabón de la cadena de igualdades:

$$(x^2 + y^2 - a^2z^2)^3 = -1728a^6u^6v^6w^6$$

Comparando este resultado con el primero, llegamos a la ecuación del astroide en coordenadas homogéneas:

$$(x^2 + y^2 - a^2z^2)^3 + 27a^2x^2y^2z^2 = 0$$

En coordenadas cartesianas ordinarias:

$$(X^2 + Y^2 - a^2)^3 + 27a^2X^2Y^2 = 0$$

Es una séxtica, o curva de sexto orden. Su aspecto puede verse en la Figura 84.

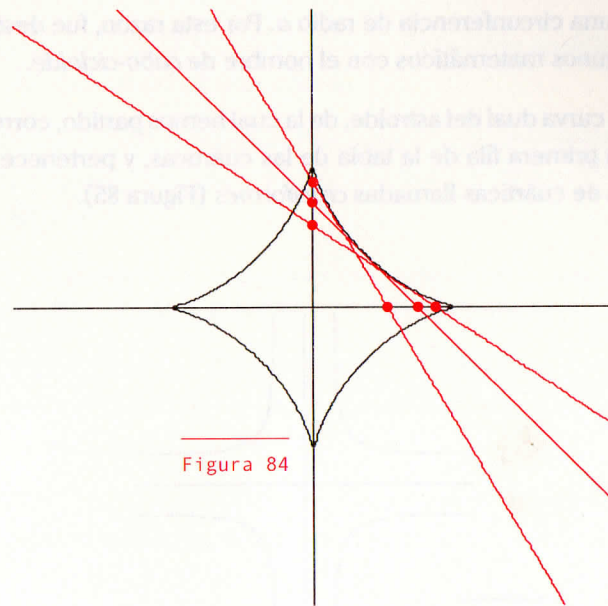


Figura 84

El astroide tiene cuatro cúspides, una en cada uno de los puntos $(a, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$ y $(-a, 0)$, y las otras dos en los puntos cíclicos. Además, posee cuatro nodos imaginarios de coordenadas (ia, ia) , $(ia, -ia)$, $(-ia, ia)$ y $(-ia, -ia)$.

La primera fórmula de Plücker nos informaría de que la clase del astroide es cuatro, si no lo supiéramos ya por ser cuatro el grado de su ecuación tangencial. La segunda nos dice que carece de inflexiones, y la tercera que el número de bitangentes es tres. La cuarta no cuenta nada nuevo. El número de puntos dobles es diez, todos los que puede tener una séxtica, en consecuencia su género es cero.

El número de trabajos dedicados a esta curva es considerable. Johann Bernoulli (1667-1748), D'Alembert (1717-1783) y Sturm (1803-1855), entre otros, se interesaron por ella. A este último se le atribuye la generación del astroide como el lugar descrito por un punto de una circunferencia de radio $a/4$ que rueda interiormente sobre una circunferencia de radio a . Por esta razón, fue designado por algunos matemáticos con el nombre de *cubo-cicloide*.

La curva dual del astroide, de la cual hemos partido, corresponde a la primera fila de la tabla de las cuárticas, y pertenece a una familia de cuárticas llamadas *cruciformes* (Figura 85).

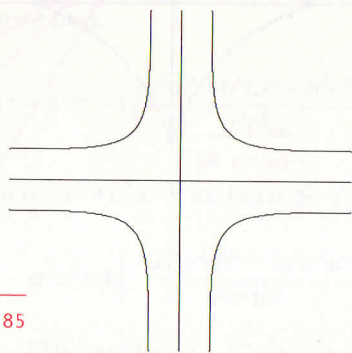


Figura 85

Bibliografía

- BOYD, R. (1989). *Curves and cubics: A Computer Handbook to Algebraic Curves*. Springer, Nueva York.
- BOYER, C. (1982). *Algebra for Mathematics*. Alamo Editorial, Madrid.
- CASTAÑO, A. G. (1989). *Lecciones de Geometría Analítica*. Editorial Cálculo, Buenos Aires.
- DE LOPE, R. N. (1977). *"Geometría analítica" en la enseñanza de la matemática: métodos y significados*. R. N. de Lope, Madrid.
- DE LOPE, R. N. (1977). *Tratado de Geometría Analítica*. R. N. de Lope, Madrid.
- DE LOPE, R. N. (1977). *Tratado de Geometría Analítica*. R. N. de Lope, Madrid.
- DE LOPE, R. N. (1977). *Tratado de Geometría Analítica*. R. N. de Lope, Madrid.
- DE LOPE, R. N. (1977). *Tratado de Geometría Analítica*. R. N. de Lope, Madrid.

Bibliografía

- BIX, R. (1998), *Conics and cubics. A Concrete Introduction to Algebraic Curves*, Springer, Nueva York.
- BOYER, C. (1992), *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, Madrid.
- CASTELNUOVO, G. (1959), *Lecciones de Geometría Analítica*, Editorial Calomien, Buenos Aires.
- DELONE, B. N. (1973), "Geometría analítica" en *La matemática: su contenido, métodos y significado*, tomo I, Alianza Editorial, Madrid.
- GOMES TEIXEIRA, F. (1971), *Traité des courbes spéciales remarquables*, Chelsea Publishing Company Bronx, Nueva York.
- GRAY, J. (1990), "Algebra in der Geometrie von Newton bis Plücker", en *Geschichte der Algebra*, Wissenschaftsverlag, Mannheim-Viena-Zürich.
- HERNÁNDEZ PEÑALVER, G. (1991), "Los orígenes de la geometría proyectiva", en *Seminario de Historia de la Matemática*, Universidad Complutense, Madrid.

- KLINE, M. (1994), *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid.
- NEWTON (1711), *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias cum enumeratione linearum tertii ordinis* (Edición de la Real Sociedad Matemática Española, traducida por J. L. Arantegui Tamayo y anotada por J. Durán Guardado).
- SANTALÓ, L. (1966), *Geometría Proyectiva*, Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Plücker y Poncelet

Dos modos de entender la geometría

En el siglo XVII nacieron las geometrías analítica y proyectiva. La primera, más un instrumento que una ciencia, no fue bien recibida por todos los matemáticos. La segunda sí que llegó a resultados antes inalcanzables. Pero la geometría analítica también podía ser útil a la proyectiva, así que ésta albergó en su seno la brecha entre los reticentes y los entusiastas de aquella. En el XIX casi todo geómetra pertenecía a uno de los dos bandos. Plücker y Poncelet son los más conocidos de cada uno de ellos.

Ricardo Moreno Castillo se licenció en matemáticas y filosofía en la Universidad de Santiago y es profesor de matemáticas en el instituto Gregorio Marañón de Madrid y en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. Es especialista en la matemática árabe y ha publicado, entre otros libros, *Omar Jayyam. Poeta y matemático* y *Fibonacci. El primer matemático medieval*.

21

La matemática en
sus personajes

nivola
www.nivola.com

